

IB 552/78-27

Aufstellung der Systemgleichungen für ein
Hubschrauber-Dreiachsen-Funktionsmodell
bei starrer und elastischer Zellenmodellie-
rung in Verbindung mit Regelungstechnischen
Untersuchungen

J. Skudridakis

Freigabe:

Die Bearbeiter:

Dipl.-Ing. J. Skudridakis
abgestellt vom Institut
für Flugmechanik
Braunschweig

Unterschriften:

Skudridakis Team

Der Abteilungsleiter:

Der Institutsdirektor:

Dieser Bericht enthält:

140 Blatt davon68 Bilder Diagramme

Aufstellung der Systemgleichungen für ein Hubschrauber-Dreiachsen-Funktionsmodell bei starrer und elastischer Zellenmodellierung in Verbindung mit Regelungstechnischen Untersuchungen

Obersicht

In diesem Bericht wurden **dreiaxsigne** Funktionsmodelle zur aktiven Rotor-Isolation, sowohl für starre, als auch elastische Zellenmodellierung aufgestellt und parametrisch untersucht.

Aufgrund der gezielten Reglerentwürfe wurden folgende Ziele erreicht:

- Kompensation der blattzahlharmonischen Rotorerregungen und
- Begrenzung der statischen Relativbewegungen der Rotorgetriebe-Einheit.

Zunächst wurden Reglerauslegungen für das dreiaxsigne starre Funktionsmodell untersucht (Riccati-Regler).

Eine Erweiterung dieses dreiaxsignen Rechenmodells für die elastische Hubschrauber Zellenmodellierung wurde mittels eines modifizierten Riccati-Entwurfs durchgerechnet.

Die Rechnerergebnisse zeigen, daß die aktive Rotor-Isolation für das dreiaxsigne Funktionsmodell vom Konzept her allen bekannten passiven Rotor-Isolationssystemen überlegen ist.

Die Vibrationen bei der 4- und 8-fachen Rotordrehfrequenz zeigen eine sehr gute Isolation, in Verbindung mit einem raschen Einschwingen.

Außerdem wurde bei Zusatzlastvielfachen der Abstand zwischen Rotor-Getriebe-Einheit und Zelle nachgetrimmt.

<u>Gliederung</u>	Seite
Bezeichnungen	5
1. Einleitung	10
1.1 Eigenfrequenzen des zwei Massen-Starrkörper-Systems im Frei-Frei-Zustand	13
1.2 Differentialgleichungen des Servozyllinders	15
1.3 Entwurfskriterien	17
2. Aufstellen der Systemgleichungen für das dreiachsige Funktionsmodell bei starrer Zellenmodellierung	19
2.1 Aufstellen des vollständigen Gleichungssystems für das dreiachsige Funktionsmodell bei starrer Zellenmodellierung (erste Form)	33
2.1.1 Erste Näherung ($\bar{\omega}_{svj}^2 \rightarrow \infty$), $\underline{x}_{s1}^T =$ <div style="margin-left: 40px;"> $[\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_1', \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_2',$ $\Delta \bar{p}_3, \Delta \bar{p}_3']$</div>	41
2.1.2 Zweite Näherung ($\bar{\omega}_{svj} \rightarrow \infty$), $\underline{x}_{s2}^T =$ <div style="margin-left: 40px;"> $[\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_2,$ $\Delta \bar{p}_3]$</div>	47
2.1.3 Dritte Näherung ($\bar{\omega}_{svj}^2 \rightarrow \infty$, $\bar{\tau}_j \rightarrow 0$)	50
2.1.4 Vierte Näherung ($\bar{\omega}_{svj} \rightarrow \infty$, $\bar{\tau}_j \rightarrow 0$)	54
2.2 Aufstellen des vollständigen Gleichungssystems für das dreiachsige Funktionsmodell bei starrer Zellenmodellierung (zweite Form)	57
2.2.1 Erste Näherung ($\bar{\tau}_j \rightarrow 0$)	60
3. Aufstellung der Systemgleichungen für das dreiachsige Funktionsmodell bei elastischer Zellenmodellierung	63
3.1 Zellenmodellierung	64
3.2 Koordinatensystem zur Ableitung der Bewegungs- gleichungen	72
3.3 Zellenidealisierung (Balken-Einzelmassen-System)	72
4. Aufstellen der Systemgleichungen für das geschlossene Modell	78

	Seite
4.1 Rechenmodelldaten	81
4.2 Reglerentwurf nach Rechenmodell 2.1.1	85
4.3 Reglerentwurf nach Rechenmodell 2.2	104
4.4 Reglerentwurf nach Rechenmodell 3 (elastische Zellenmodellierung)	123
5. Zusammenfassung	139
6. Literatur	140

Bezeichnungen

Ω	Rotorkreisfrequenz (rd/s)
ψ	Rotordrehwinkel (rd) ; $\psi = \Omega \cdot t$
f_R	Rotorfrequenz (Hz)
k_R, k_Z, k_L, k_Δ	Federkonstanten
d_L, d_Δ	Dämpfungsbeiwerte
$\Delta z, (\Delta \bar{z})$	Relativauslenkung (normiert)
$z_R, (\bar{z}_R)$	Rotorauslenkung (normiert)
$z_z, (\bar{z}_z)$	Zellenauslenkung (normiert)
$\varepsilon, (\bar{\varepsilon})$	Ventilkolbenauslenkung (normiert)
$i, (\bar{i})$	Ventilsteuerstrom (normiert)
$F_R, (\bar{F}_R)$	Rotorstörkraft (normiert)
$m, (m_R, m_Z)$	Masse (Rotor, Zelle)
$G_{\text{ges}} = m \cdot g$	Gesamtgewicht (Rotor und Zelle)
\underline{x}_i	Zustandsvektor ($i = 0, 1, \dots, n$)
\underline{A}_i	Dynamikmatrizen der Zustandsmodelle
\underline{b}_i	Steuervektoren der Zustandsmodelle
\underline{b}_{v_i}	Störeingangsvektoren der Zustandsmodelle
δ_A	Maximalauslenkung des Aktuators
Δp_{max}	Maximale Druckdifferenz des Aktuators
$b_A, (\bar{b}_A)$	Aktuatoranschlußbeschleunigung (normiert)
$F_I, (\bar{F}_I)$	Isolatorkraft (normiert)
n_i, n_i'	Zustandselemente der Regler ($i = 0, 1, \dots, n$)
$F_A, (\bar{F}_A)$	Kolbenfläche des Aktuators (normiert)
$\underline{Q}, \underline{R}$	Gewichtsmatrizen (für den Riccati-Entwurf)
J	Gütekriterium
\underline{r}	Rückführvektor
\underline{K}	Rückführmatrix

$\beta (\cdot)$	Dämpfungsgewinn
ω_{si}	Notchfrequenz
s	Laplace-Operator
\underline{x}_{Ni}	Zustandsvektor der Notch Elemente
\underline{B}	Eingangsmatrix der Notch Elemente
\underline{A}	Dynamikmatrix der Notch Elemente
\underline{y}_{Ni}	Meßvektor der Notch Elemente
\underline{C}_i	Meßmatrix der Zustandsmodelle
$r_{\Delta z}, r_{\Delta p}, r_{n_4}, r_{n_4}', r_{n_8}, r_{n_8}', r_{n_o}$	Rückführkoeffizienten
\underline{N}_i	Dynamikmatrix der Notch Elemente
η_i	Generalisierte Koordinaten der Zellenmodalformen
$\underline{W}(s)$	Zählerpolynommatrix (Vektor)
$F(s)$	Nennerpolynom (offener Kreis)
$H(s)$	Nennerpolynom (geschlossener Kreis)
\underline{I}	Einheitsmatrix
q	Komponenten der Rückführmatrix \underline{K}
T	Abtastperiode
t	Zeitvariable
ω	Frequenz (allgemein)

Differentiationssymbole

$\cdot = \frac{d}{dt}$	Differentiation nach der Zeit t
$' = \frac{d}{d\psi}$	Differentiation nach dem Azimuteinkel ψ

$\underline{\Phi}$	Matrix der Eigenschwingungsform
\underline{q}	Vektor der generalisierten Koordinaten
$\underline{M} = \underline{\Phi}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{\Phi}$	Diagonalmatrix der generalisierten Masse
$\underline{D} = \underline{\Phi}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{\Phi}$	Matrix der generalisierten Dämpfungskoeffizienten
$\underline{K} = \underline{\Phi}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\Phi}$	Diagonalmatrix der generalisierten Steifigkeiten
\underline{Q}	Vektor der generalisierten Kräfte
ω	Kreisfrequenz
ω_r	Eigenkreisfrequenz
M_r	generalisierte Masse
P_r	Element des Vektors \underline{P}
\underline{P}	Vektor der generalisierten Erregungskräfte
$\underline{\Phi}_r$	r-te Eigenschwingungsform
$\overset{I}{\underline{u}}, \overset{I}{\underline{\ddot{u}}}, \overset{I}{\underline{u}}, \overset{I}{\underline{\ddot{u}}}$	Auslenkungs-Beschleunigungsvektoren bezogen auf das I-Koordinaten System
$\overset{R}{\underline{u}}, \overset{R}{\underline{u}}$	Auslenkungsvektoren bezogen auf das R-System

\underline{I}_0^u	Auslenkungsvektor des Nullschnittes
$\underline{m}_1, \underline{m}_0$	Massen-Trägheitsmatrizen, deren Elemente sich auf die örtlichen Koordinatensysteme ($M_{xi} - M_{yi} - M_{zi}$) beziehen.
\underline{s}^M	generalisierte Massenmatrix des 0-Schnittes
\underline{m}_s	Massen-Trägheitsmatrix des 0-Schnittes
\underline{O}^M	generalisierte Massenmatrix der Zelle <u>einschließlich</u> der Trägheitseigenschaften des 0-Schnittes
$\underline{1}^M$	Massen-Trägheitsmatrix der Zelle <u>ohne</u> Trägheitseigenschaften des 0-Schnittes
$\underline{O}^K, \underline{1}^K$	Steifigkeitsmatrizen
\underline{R}^K	Auf das R-System transponierte Steifigkeitsmatrix der <u>freien</u> Zelle
$\underline{O}^C, \underline{1}^C$	Nachgiebigkeitsmatrizen
$\underline{O}^R, \underline{1}^R$	Transformationsmatrizen zwischen I- und R-System
\underline{s}^R	Teilmatrix der Transformationsmatrix \underline{O}^R , welche den Freiheitsmatrizen des 0-Schnittes zugeordnet ist.
$\underline{O}^\Phi, \underline{1}^\Phi$	Modalmatrizen mit den Eigenvektoren als Spalten, bezogen auf das I-System

$$\overset{R}{\underset{0}{\phi}}, \overset{R}{\underset{1}{\phi}}$$

Modalmatrizen bezogen auf das R-System

$$\underline{\omega_e^2}$$

Diagonalmatrix der Eigenfrequenzquadrate

N = Anzahl der Massen der halben Zelle

n = Anzahl der Freiheitsgrade der halben Zelle
(Balkenstruktur) ohne 0-Schnitt

l = Anzahl der berechneten Eigenschwingungsformen

1. Einleitung

Die Strömungsverhältnisse an einem Hubschrauberrotor führen durch die Überlagerung der Hubschrauberbewegung und der Rotordrehung periodisch veränderliche Luftlasten an den Rotorblättern, welche zeitveränderliche Erregerkräfte und -momente an der Rotornabe zur Folge haben.

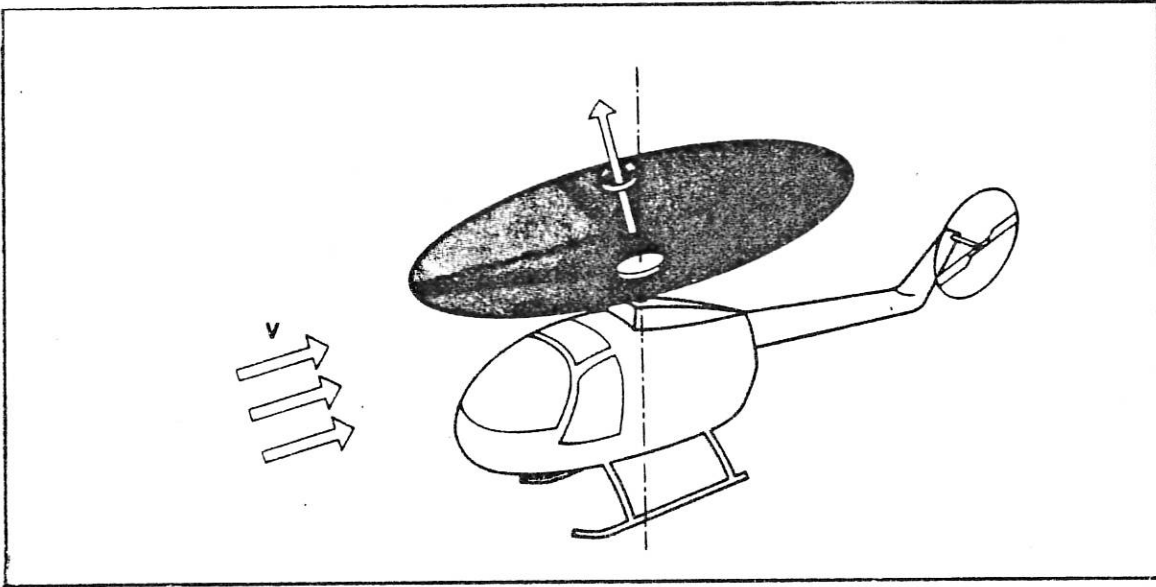


Bild 1: Luftkräfte am Hubschrauber

Diese deterministische Störrerregung setzt sich zusammen aus dem sog. blattzahlharmonischen Komponenten mit den Frequenzen $N \cdot \Omega$, $2N \cdot \Omega$ usw., die durch die Rotorblattzahl N und die Rotordrehfrequenz Ω bestimmt ist.

Typische Amplitudenspektren dieser Frequenzen zeigt Bild 2 am Beispiel des Hubschraubers BO 105.

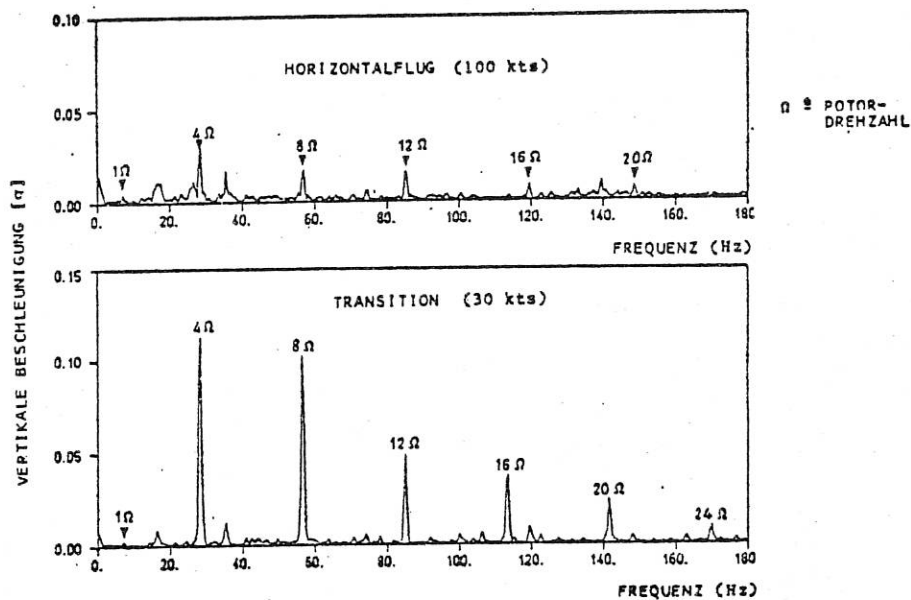


Bild 2: Vertikale Vibrationen am Pilotensitz (BO 105)

Diese Vibrationen bewirken neben den Auswirkungen auf die Struktur eine Beeinträchtigung des Insassen-Komforts. Es sind deshalb Bestrebungen im Gange, die Beurteilungskriterien für Vibrationen bei zukünftigen Hubschraubern wesentlich zu verschärfen.

Von den Möglichkeiten eine Vibrationsverringerung am Hubschrauber, wird im Rahmen der ZKP-Aufgabe ASIS (Aktives Schwingungs-Isolations-System) die Schwingungsisolierung mittels regelbarer Stellglieder zwischen Rotorgetriebe-Einheit und Hubschrauberzelle untersucht.

Entsprechende Regler sollen über hydraulische Servo-Elemente die Rotor-Getriebe-Einheit von der Zelle trennen und im gesamten Einsatzprofil des Hubschraubers die folgenden Aufgaben erfüllen.

- Unterdrückung bzw. starke Reduzierung der störenden blattzahlharmonischen Zellenvibrationen (4Ω , 8Ω etc., für Vierblattrotoren).
- Begrenzung der statischen bzw. quasistatischen Relativbewegungen zwischen Rotor-Getriebe-Einheit und der Zelle bei Manöver.

Parallel zu den regelbaren Kraftgeneratoren (Bild 3) in der Isolationsachse, sind Feder und Dämpfer geschaltet, um eine Gewährleistung der Betriebssicherheit bei Ausfall des Kraftgenerators (Fail-Safe) zu erreichen.

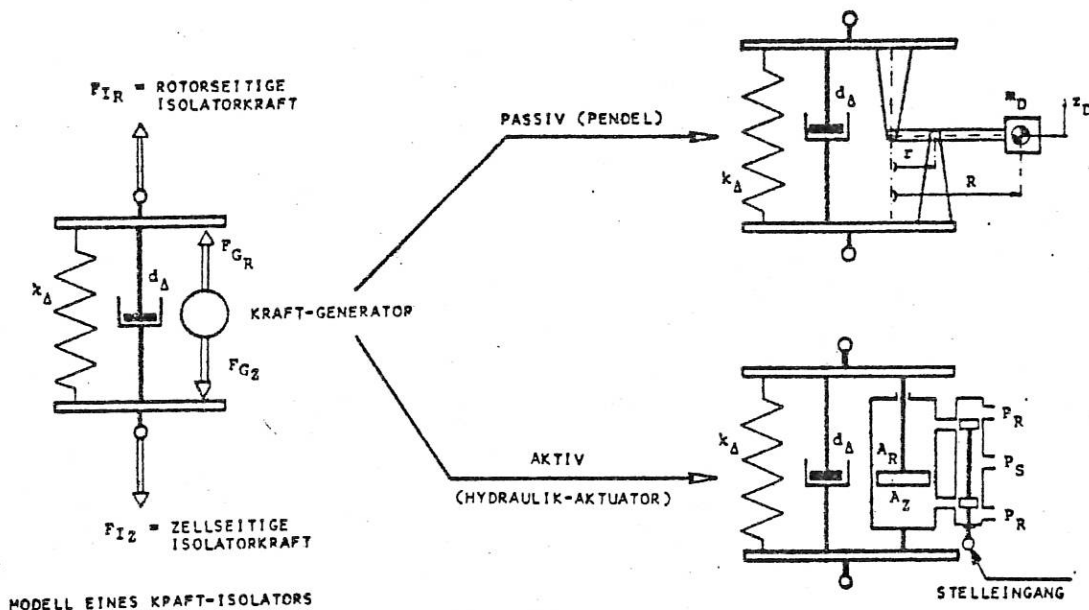


Bild 3: Realisation des aktiven Kraft-Isolators

Im vorliegenden Bericht werden die Reglerauslegungen für dreiachsige elastische Hubschraubermodelle untersucht.

Dabei wird von einem Rechenmodell ausgegangen, welches zur Schwingungs-isolation der Vertikal-, Längs- und Nickachse, entsprechend drei Kraft-isolatoren berücksichtigt.

Das Rechenmodell berücksichtigt drei Isolationsachsen zur Schwingungs-isolation der Vertikal-, Längs- und Nickachse.

Die Masse m des Hubschraubers (ohne Rotorblättermasse) wurde rein formal in der Rotor-Getriebe-Masse m_R und in der Zellenmasse m_z aufgeteilt.

In Anlehnung an die Masse des wirklichen Hubschraubers wurde die Masse m des Rechenmodells gleich $2/3$ der Masse des Versuchshubschraubers (Versuchshubschrauber ist eine Umkonstruktion der BO 105) angenommen.

$$m = 1.580 \text{ kg}$$

$$m_z = 1.340 \text{ kg}$$

$$m_R = 240 \text{ kg}$$

Weiter wurde die Rotor-Getriebe-Einheit als starre Masse modelliert, die über die drei Kraftisolatoren mit der elastischen Zelle verbunden ist.

Außerdem wirken auf die Rotor-Getriebe-Einheit als äußere Störkräfte und Momente die blattzahlharmonische Störkomponente F_{Rx} , F_{Rz} und M_{Ry} .

1.1 Eigenfrequenzen des zwei Massen-Starrkörper-Systems im Frei-Frei-Zustand

Die aus den Gleichgewichtsbedingungen folgenden Federkräfte in der statischen Ruhelage (Bild 2.1, Seite 19)

$$k_{1_{öl}} \cdot w_{1_{st}} = - \frac{l_1}{l_2 - l_1} \cdot m_z \cdot g$$

$$k_{2_{öl}} \cdot w_{2_{st}} = \frac{l_2}{l_2 - l_1} \cdot m_z \cdot g$$

Liefern für die statischen Federauslenkungen infolge des Zelleneigen-
gewichtes:

$$w_{1st} = - \frac{l_1}{l_2 - l_1} \frac{m_z \cdot g}{k_{1öl}}$$

$$w_{2st} = \frac{l_2}{l_2 - l_1} \frac{m_z \cdot g}{k_{2öl}}$$

Um diese statische Ausgangslage kann das zwei Massen-Starrkörper-System gekoppelte Vertikal-, Horizontal- und Drehschwingungen ausführen.

- Zur Schätzung der Kreisfrequenz für die "Ölfeder" wird nur die Schlagbewegung berücksichtigt.

1.2 Differentialgleichungen des Servozyllinders

Der hydraulische Arbeitszylinder wird durch ein elektrohydraulisches Durchflußservoventil gesteuert.

Dabei wird der elektrische Steuerstrom i in einen hydraulischen Strom q umwandelt, wobei eine linearisierte Durchflußverstärkung k_q vorliegt, die sich aus der Verstärkung des elektrischen Stroms i und der Wirkung der Servoventilauslenkung ϵ zusammensetzt.

$$k_q = \frac{\partial q}{\partial i} = \frac{\partial q}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial i} = k_\epsilon \cdot k_i$$

Der Ölstrom q fließt in den Arbeitszylinder, in dem die Druckdifferenz Δp herrscht, die wieder auf das Servoventil mit einem Lastabhängigkeitsfaktor k_p einwirkt.

$$q = k_\epsilon \cdot \epsilon - k_p \cdot \Delta p$$

Es wird angenommen, daß die Servoventilauslenkung ϵ dem Steuerstrom i mit einer Verzögerung 2ter Ordnung folgt.

$$\ddot{\epsilon} + 2 \cdot \zeta_{sv} \cdot \omega_{sv} \cdot \dot{\epsilon} + \omega_{sv}^2 \cdot \epsilon = \omega_{sv}^2 \cdot k_i \cdot i$$

Die Durchflußbilanz im Aktuator lautet:

$$q = A \cdot \dot{\Delta z}_M + A^2 \cdot \left(\frac{1}{k_{\text{ö1}}} + \frac{1}{k_R} + \frac{1}{k_z} \right) \cdot \dot{\Delta p} + C_L \cdot \Delta p$$

$$\text{mit } 1/k^* = A^2 \cdot \left(\frac{1}{k_{\text{ö1}}} + \frac{1}{k_R} + \frac{1}{k_z} \right) \quad \text{und}$$

$$1/\tau = k^* \cdot (k_p + C_L)$$

$$\text{wird } \Delta \dot{p} = -\frac{1}{\tau} \cdot \Delta p + k^* \cdot k_{\epsilon} \cdot \epsilon - k^* \cdot A \cdot \Delta \dot{z}_M$$

$$\ddot{\epsilon} = -2 \cdot \zeta_{sv} \cdot \omega_{sv} \cdot \dot{\epsilon} - \omega_{sv}^2 \cdot \epsilon + \omega_{sv}^2 \cdot k_i \cdot i$$

worin sind: C_L = Leckdurchflußfaktor

k_z = zellenseitige Anschlußsteifigkeit

k_R = rotorseitige Anschlußsteifigkeit

$k_{öl}$ = Federsteifigkeit des Öls (u.a. abhängig vom Nutz- und Totvolumen im Arbeitszylinder)

ω_{sv} = Eigenkreisfrequenz des Servoventils

ζ_{sv} = Dämpfung des Servoventils

$\Delta \dot{z}_M$ = örtliche Relativ-Geschwindigkeit des Arbeitskolben gegen den Arbeitszylinder

Diese Beziehungen gelten separat für jeden der drei Arbeitszylinder, wobei mit den Indizes 1,2,3 unterschieden wird.

1.3 Entwurfskriterien

Schwingungsisolation: Vollständige Kompensation der ersten und zweiten blattzahlharmonischen Rotorstörfrequenzen (auf der Zelle)

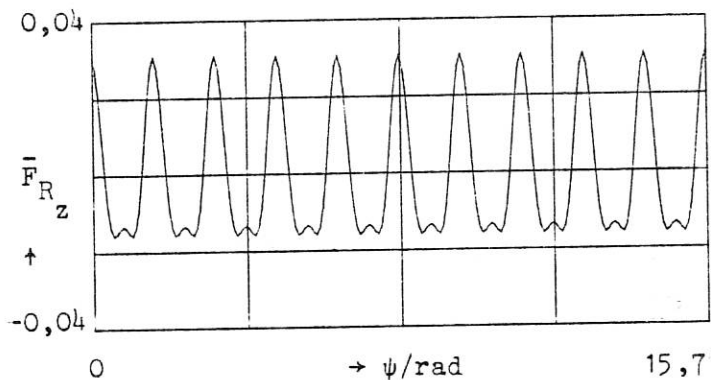
$$\lim_{\psi \rightarrow \infty} \bar{F}_{I_1}, \bar{F}_{I_2}, \bar{F}_{I_3} \rightarrow 0; \quad \lim_{\psi \rightarrow \infty} \bar{z}_z'', \bar{x}_z'', \bar{\theta}_z'' \rightarrow 0$$

$$\psi \rightarrow \infty$$

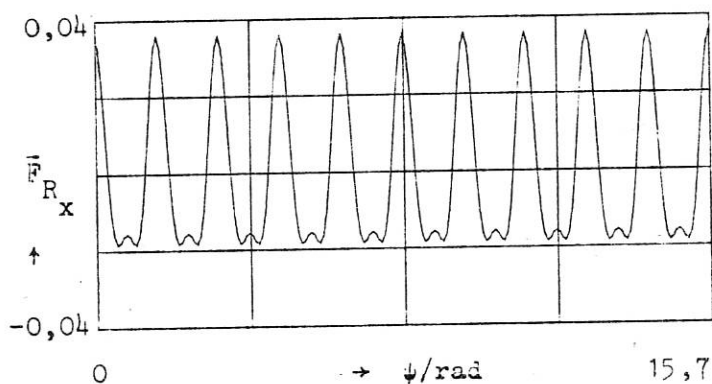
$$\psi \rightarrow \infty$$

für

$$\bar{F}_{R_z} = 0,0221 \cdot (\cos 4\psi + 0,4 \cos 8\psi)$$



$$\bar{F}_{R_x} = 0,0258 \cdot (\cos 4\psi + 0,4 \cos 8\psi)$$



$$\bar{M}_{R_y} = 0,0154 \cdot (\cos 4\psi + 0,4 \cos 8\psi)$$

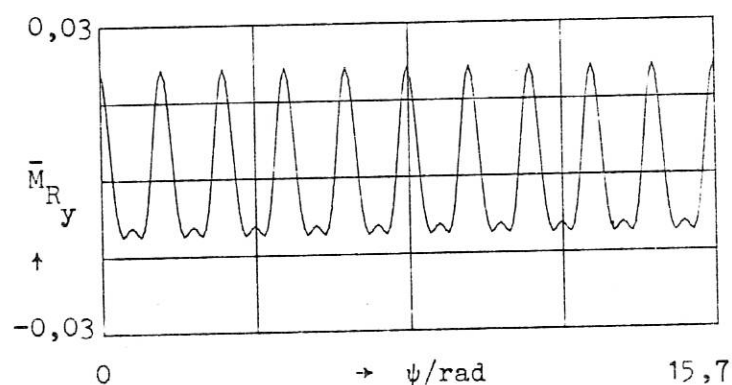


Bild 1.3.1 Vibrationsstöbelastungen
 $\bar{F}_{R_z}, \bar{F}_{R_x}, \bar{M}_{R_y}$

D.h. vom Störsystem auf die Zelle übertragene Kräfte $\bar{F}_{I_1}, \bar{F}_{I_2}, \bar{F}_{I_3}$ sollen nach Null gehen bzw. die Zellenbeschleunigungen $\bar{z}_z'', \bar{x}_z'', \bar{\theta}_z''$ sollen im eingeschwungenen Zustand gegen Null gehen.

Getriebetrimmung: Begrenzung der statischen bzw. quasistatischen Relativauslenkung zwischen der Rotor-Getriebe-Einheit und der Zelle bei Flugfällen mit einem Zusatzlastvielfachen $\Delta n = 1,5$.

$$\lim \Delta \bar{z} \rightarrow \infty$$

$$\psi \rightarrow \infty$$

im eigenschwingenden Zustand

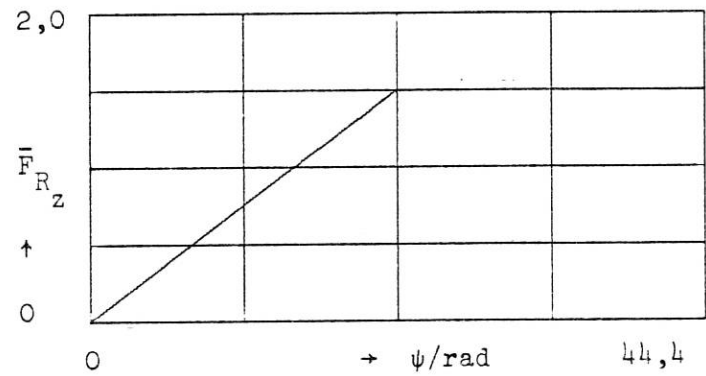
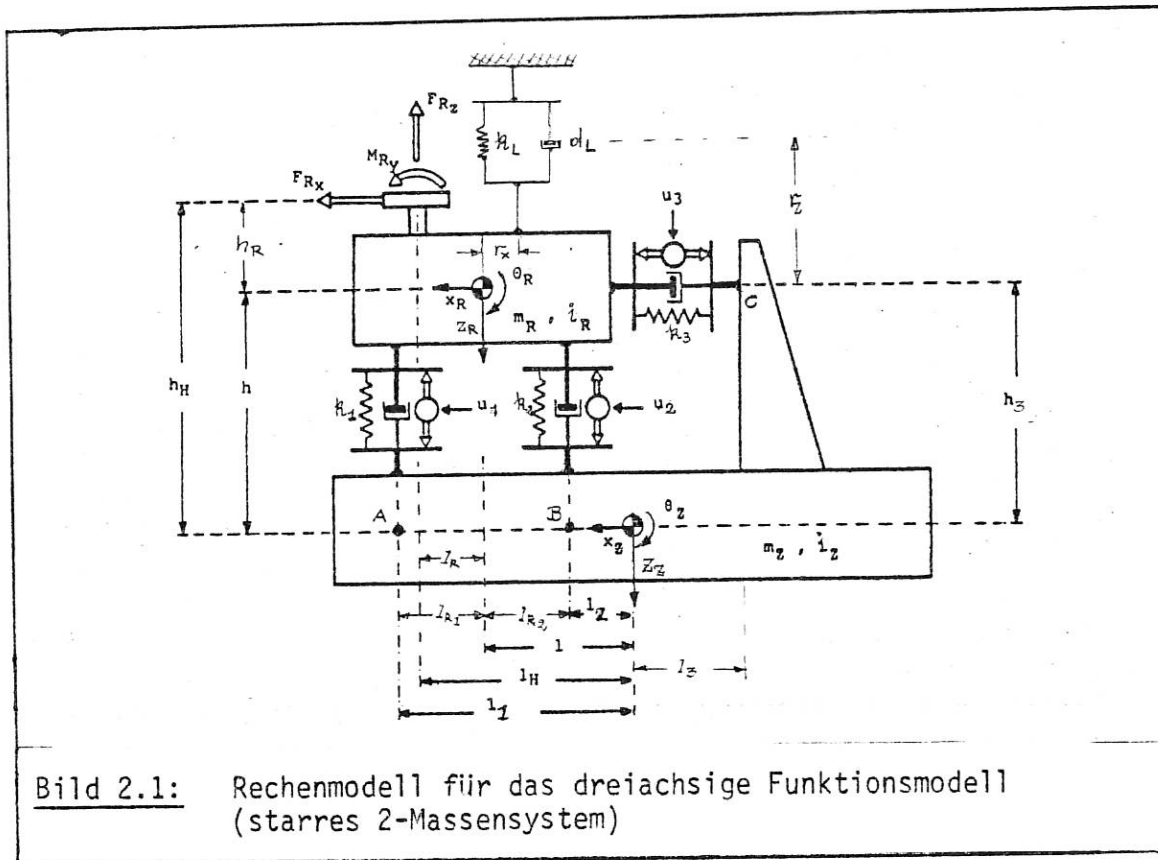


Bild 1.3.2 Störkraft \bar{F}_{Rz} (harte Rampe)

2. Aufstellen der Systemgleichungen für das dreiachsige Funktionsmodell bei starrer Zellenmodellierung.



Die Newton-Euler'schen Gleichungen für das dieses Dreiachsensystem um die statische Ausgangslage in der linearisierten Form lauten:

$$m_R \cdot \ddot{z}_R + F_{1R} + F_{2R} + F_{Rz} + d_L \cdot \dot{z}_R + k_L \cdot z_R = 0$$

$$m_R \cdot \ddot{x}_R + F_{3R} - F_{Rx} = 0$$

$$m_R \cdot i_R^2 \cdot \ddot{\theta}_R - l_{R1} \cdot F_{1R} + l_{R2} \cdot F_{2R} + r_x \cdot d_L \cdot \dot{z}_R + r_x \cdot k_L \cdot z_R -$$

$$l_R \cdot F_{Rz} + h_R \cdot F_{Rx} + M_{Ry} = 0$$

(Bei sehr weicher Luftfederung geht $k_L \rightarrow 0$, $d_L \rightarrow 0$)

$$m_z \cdot \ddot{z}_z - F_{1z} - F_{2z} = 0$$

$$m_z \cdot \ddot{x}_z - F_{3z} = 0$$

$$m_z \cdot i_z^2 \cdot \ddot{\theta}_z + l_1 \cdot F_{1z} + l_2 \cdot F_{2z} + h_3 \cdot F_{3z} = 0$$

Die Synthese der Bewegungsgleichungen geschieht über die Heranziehung der Isolatorenkräfte.

Es gelten die Beziehungen:

$$z_{RA} - z_{RA}^* = - \frac{\Delta p_1}{k_{R1}} \cdot A_1$$

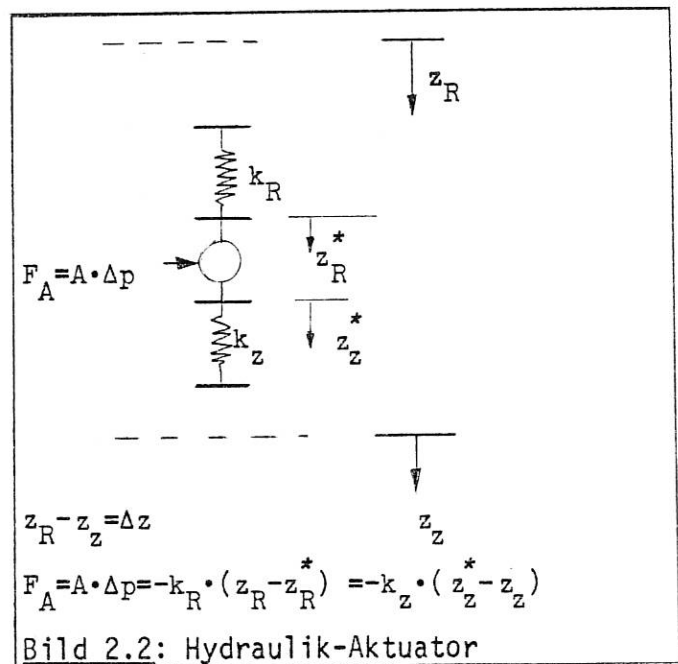
$$z_{zA} - z_{zA}^* = \frac{\Delta p_1}{k_{Z1}} \cdot A_1$$

$$z_{RB} - z_{RB}^* = - \frac{\Delta p_2}{k_{R2}} \cdot A_2$$

$$z_{zB} - z_{zB}^* = \frac{\Delta p_2}{k_{Z2}} \cdot A_2$$

$$x_{RC} - x_{RC}^* = - \frac{\Delta p_3}{k_{R3}} \cdot A_3$$

$$x_{zC} - x_{zC}^* = \frac{\Delta p_3}{k_{Z3}} \cdot A_3$$



Die Isolatorenkräfte errechnen sich zu:

$$F_{1R} = F_{1z} = F_{I1} = - \Delta p_1 \cdot A_1 + k_1 \cdot \Delta z_A + d_1 \cdot \Delta \dot{z}_A$$

$$F_{2R} = F_{2z} = F_{I2} = - \Delta p_2 \cdot A_2 + k_2 \cdot \Delta z_B + d_2 \cdot \Delta \dot{z}_B$$

$$F_{3R} = F_{3z} = F_{I3} = - \Delta p_3 \cdot A_3 + k_3 \cdot \Delta x_C + d_3 \cdot \Delta \dot{x}_C$$

Mit der Einführung der Lagekoordinaten Δz , Δx , $\Delta \theta$ lassen sich die Newton-Euler'schen Gleichungen in der folgenden Form anschreiben:

$$m_R \cdot (\ddot{z}_z + \Delta \ddot{z}) + m_z \cdot \ddot{z}_z + F_{Rz} = 0 \quad (1)$$

$$m_z \cdot \ddot{z}_z - (k_1 + k_2) \cdot \Delta z + (k_1 \cdot l_1 + k_2 \cdot l_2) \cdot \Delta \theta - (d_1 + d_2) \cdot \Delta \dot{z} + (d_1 \cdot l_1 + d_2 \cdot l_2) \cdot \Delta \dot{\theta} + A_1 \cdot \Delta p_1 + A_2 \cdot \Delta p_2 = 0 \quad (2)$$

$$m_R \cdot (\ddot{x}_z + \Delta \ddot{x}) + m_z \cdot \ddot{x}_z - F_{Rx} = 0 \quad (3)$$

$$m_z \cdot \ddot{x}_z + A_3 \cdot \Delta p_3 - k_3 \cdot \Delta x - d_3 \cdot \Delta \dot{x} = 0 \quad (4)$$

$$m_R \cdot i_R^2 \cdot (\ddot{\theta}_z + \Delta \ddot{\theta}) + m_z \cdot i_z^2 \cdot \ddot{\theta}_z + F_{I1} (l_1 - l_{R1}) + F_{I2} \cdot (l_2 + l_{R2}) + h_3 \cdot F_{3z} + l_R \cdot F_{Rz} + h_R \cdot F_{Rx} + M_{Ry} = 0 \quad (5)$$

$$m_z \cdot i_z^2 \cdot \ddot{\theta}_z + l_1 \cdot F_{1z} + l_2 \cdot F_{2z} + h_3 \cdot F_{3z} = 0 \quad (6)$$

Darin sind: $\Delta z = z_R - z_z$; $\Delta x = x_R - x_z$ und $\Delta \theta = \theta_R - \theta_z$

Durch Einsetzung folgt:

aus (1) und (2)

$$- \frac{m_z \cdot m_R}{m_z + m_R} \cdot \Delta \ddot{z} - (d_1 + d_2) \cdot \Delta \dot{z} - (k_1 + k_2) \cdot \Delta z + (l_1 \cdot d_1 + l_2 \cdot d_2) \cdot \Delta \dot{\theta} + (l_1 \cdot k_1 + l_2 \cdot k_2) \cdot \Delta \theta + A_1 \cdot \Delta p_1 + A_2 \cdot \Delta p_2 - \frac{m_z}{m_z + m_R} \cdot F_{Rz} = 0$$

aus (3) und (4)

$$- \frac{m_z \cdot m_R}{m_z + m_R} \cdot \ddot{\Delta x} + A_3 \cdot \Delta p_3 - k_3 \cdot \Delta x - d_3 \cdot \dot{\Delta x} + \frac{m_z}{m_z + m_R} \cdot F_{Rx} = 0$$

aus (5) und (6)

$$\begin{aligned} - \frac{m_z \cdot i_z^2 \cdot m_R \cdot i_R^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot \ddot{\Delta \theta} - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot F_{I1} \cdot (l_1 - l_{R1}) - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot F_{I2} \cdot (l_2 + l_{R2}) - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot h_3 \cdot F_{3z} \\ - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot l_R \cdot F_{Rz} - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot h_R \cdot F_{Rx} - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot M_{Ry} + l_1 \cdot F_{1z} + l_2 \cdot F_{2z} + h_3 \cdot F_{3z} = 0 \end{aligned}$$

22

bzw:

$$\begin{aligned} - \frac{m_z \cdot i_z^2 \cdot m_R \cdot i_R^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot \ddot{\Delta \theta} + \left[l_1 - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot l \right] \cdot F_{I1} + \left[l_2 - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot (l_2 + l_{R2}) \right] \cdot F_{I2} + h_3 \cdot \left[1 - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \right] \cdot F_{I3} \\ - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot l_R \cdot F_{Rz} - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot h_R \cdot F_{Rx} - \frac{m_z \cdot i_z^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \cdot M_{Ry} = 0 \end{aligned}$$

$$l = l_1 - l_{R1} = l_2 + l_{R2}$$

Mit den Substitutionen

$$M = \frac{m_R}{m_z + m_R} = \frac{m_R}{m} \rightarrow \frac{m - m_R}{m} = 1 - M$$

$$\omega_j = \sqrt{\frac{k \cdot j}{m_R}} ; \quad 2 \cdot \omega_j \cdot \zeta_j = \frac{d_j}{m_R}$$

$$I = \frac{m_R \cdot i_R^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} \rightarrow \frac{m \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2 - m_R \cdot i_R^2}{m_z \cdot i_z^2 + m_R \cdot i_R^2} = 1 - I$$

folgen die Gleichungen:

$$(1-M) \cdot \ddot{\Delta z} + 2 \cdot (\omega_1 \cdot \zeta_1 + \omega_2 \cdot \zeta_2) \cdot \dot{\Delta z} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot \Delta z - 2 \cdot (l_1 \cdot \omega_1 \cdot \zeta_1 + l_2 \cdot \omega_2 \cdot \zeta_2) \cdot \dot{\Delta \theta} - (l_1 \cdot \omega_1^2 + l_2 \cdot \omega_2^2) \cdot \Delta \theta - \frac{A_1}{m_R} \cdot \Delta p_1 - \frac{A_2}{m_R} \cdot \Delta p_2 + \frac{1-M}{m_R} \cdot F_{Rz} = 0 \quad (I)$$

$$(1-M) \cdot \ddot{\Delta x} + 2 \cdot \omega_3 \cdot \zeta_3 \cdot \dot{\Delta x} + \omega_3^2 \cdot \Delta x - \frac{A_3}{m_R} \cdot \Delta p_3 - \frac{1-M}{m_R} \cdot F_{Rx} = 0 \quad (II)$$

$$(1-I) \ddot{\Delta\theta} - [l_1 - (1-I) \cdot l] \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot [\omega_1^2 \cdot \Delta z - l_1 \cdot \omega_1^2 \cdot \Delta\theta + 2 \cdot \omega_1 \cdot \zeta_1 \cdot \Delta \dot{z} - 2 \cdot l_1 \cdot \omega_1 \cdot \zeta_1 \cdot \Delta \dot{\theta} - \frac{A_1}{m_R} \Delta p_1] - [l_2 - (1-I) \cdot (l_2^{-1} R_2)] \cdot \frac{1}{i_R^2}$$

$$[\omega_2^2 \cdot \Delta z - l_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \Delta\theta + 2 \cdot \omega_2 \cdot \zeta_2 \cdot \Delta \dot{z} - 2 \cdot l_2 \cdot \omega_2 \cdot \zeta_2 \cdot \Delta \dot{\theta} - \frac{A_2}{m_R} \Delta p_2] - h_3 \cdot [1 - (1-I)] \cdot \frac{1}{i_R^2} [2 \cdot \omega_3 \cdot \zeta_3 \cdot \Delta \dot{x} + \omega_3^2 \cdot \Delta x - \frac{A_3}{m_R} \Delta p_3]$$

$$+ (1-I) \cdot \frac{l_R}{i_R^2} \cdot \frac{1}{m_R} \cdot F_{Rz} + (1-I) \cdot \frac{h_R}{i_R^2} \cdot \frac{1}{m_R} \cdot F_{Rx} + (1-I) \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot \frac{m_R}{m_R} \cdot M_{Ry} = 0 \quad (III, a)$$

bzw:

$$(1-I) \cdot \ddot{\Delta\theta} - \frac{l_R}{i_R^2} \cdot 2 \cdot (\omega_1^* \cdot \zeta_1^* + \omega_2^* \cdot \zeta_2^*) \cdot \Delta \dot{z} + \frac{l_R}{i_R^2} \cdot 2 \cdot (l_1 \cdot \omega_1^* \cdot \zeta_1^* + l_2 \cdot \omega_2^* \cdot \zeta_2^*) \cdot \Delta \dot{\theta} - \frac{l_R}{i_R^2} \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot \Delta z + \frac{l_R}{i_R^2} \cdot (l_1 \cdot \omega_1^{*2} + l_2 \cdot \omega_2^{*2})$$

$$\cdot \Delta\theta + [l_1 - (1-I) \cdot l] \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot \frac{A_1}{m_R} \cdot \Delta p_1 + [l_{R2} (1-I) + l \cdot l_2] \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot \frac{A_2}{m_R} \cdot \Delta p_2 - \frac{l}{i_R^2} \cdot 2 \cdot h_3 \cdot \omega_3 \cdot \zeta_3 \cdot \Delta \dot{x} - \frac{l}{i_R^2} \cdot \omega_3^2 \cdot \Delta x + h_3$$

$$+ \frac{l}{i_R^2} \cdot \frac{A_3}{m_R} \cdot h_3 \cdot \Delta p_3 + (1-I) \cdot \frac{l_R}{i_R^2} \cdot \frac{1}{m_R} \cdot F_{Rz} + (1-I) \cdot \frac{h_R}{i_R^2} \cdot \frac{1}{m_R} \cdot F_{Rx} + (1-I) \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot \frac{m_R}{m_R} \cdot M_{Ry} = 0 \quad (III, b)$$

darin sind: $l_1 - (1-I) \cdot (l_1^{-1} R_1) = L_1$

$$l_2 - (1-I) \cdot (l_2^{-1} R_2) = L_2 \quad L = L_1 \cdot L_2$$

$$\omega_1^* = \frac{\omega_1}{\sqrt{L_1}}, \omega_2^* = \frac{\omega_2}{\sqrt{L_2}}, \zeta_1^* = \frac{\zeta_1}{\sqrt{L_1}}, \zeta_2^* = \frac{\zeta_2}{\sqrt{L_2}}$$

Mit den Normierungen:

$$\bar{F}_{Rx} = \frac{F_{Rx}}{m \cdot g}$$

$$\bar{F}_{Rz} = \frac{F_{Rz}}{m \cdot g}$$

$$\bar{M}_{Ry} = \frac{M_{Ry}}{m \cdot g}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \Delta z_{\max} \\ \delta_1 &= \Delta x_{\max} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{gleiche Normierung} \rightarrow \delta = \frac{g}{\delta_1 \cdot \Omega^2}$$

$$\gamma_1 = \frac{A_1 \cdot \Delta p_{\max}}{\delta_1 \cdot \Omega^2 \cdot m_R}$$

$$\Delta \bar{p}_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_{\max}}$$

$$\gamma_2 = \frac{A_2 \cdot \Delta p_{\max}}{\delta_1 \cdot \Omega^2 \cdot m_R}$$

$$\Delta \bar{p}_2 = \frac{\Delta p_2}{\Delta p_{\max}}$$

$$\gamma_3 = \frac{A_3 \cdot \Delta p_{\max}}{\delta_1 \cdot \Omega^2 \cdot m_R}$$

$$\Delta \bar{p}_3 = \frac{\Delta p_3}{\Delta p_{\max}}$$

$$\bar{\omega}_j = \frac{\omega_j}{\Omega}$$

$$\Delta \bar{\theta} = \frac{\Delta \theta}{\delta_1}$$

$$\Delta \bar{z} = \frac{\Delta z}{\delta_1}$$

$$\Delta \bar{x} = \frac{\Delta x}{\delta_1}$$

$$\psi = \Omega \cdot t \quad \frac{d}{d\psi} () = ()'$$

$$\frac{d}{dt} = \Omega \cdot \frac{d}{d\psi}$$

Lassen sich die Bewegungsgleichungen (I), (II) und (III,b) folgendermaßen schreiben:

$$(1-M) \cdot \Delta \bar{z}'' + 2 \cdot (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2) \cdot \Delta \bar{z}' + (\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) \cdot \Delta \bar{z} - 2 \cdot (1_1 \cdot \bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + 1_2 \cdot \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2) \cdot \Delta \bar{\theta}' - (1_1 \cdot \bar{\omega}_1^2 + 1_2 \cdot \bar{\omega}_2^2) \cdot \Delta \bar{\theta}$$

$$- \gamma_1 \cdot \Delta \bar{p}_1 - \gamma_2 \cdot \Delta \bar{p}_2 + \frac{1-M}{M} \cdot \delta \cdot \bar{F}_{Rz} = 0$$

$$(1-M) \cdot \Delta \bar{x}'' + 2 \cdot \bar{\omega}_3 \cdot \bar{\zeta}_3 \cdot \Delta \bar{x} + \bar{\omega}_3^2 \cdot \Delta \bar{x} - \gamma_3 \cdot \Delta p_3 - \frac{1-M}{M} \cdot \delta \cdot \bar{F}_{Rx} = 0$$

$$(1-I) \cdot \Delta \bar{\theta}'' - \frac{1}{i_R^2} \cdot 2 \cdot (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2) \cdot \Delta \bar{z}' + \frac{1}{i_R^2} \cdot \Delta \bar{z} + \frac{1}{i_R^2} \cdot 2 \cdot (1_1 \cdot \bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + 1_2 \cdot \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2^*) \cdot \Delta \bar{\theta}' - \frac{1}{i_R^2} \cdot (\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) \cdot \Delta \bar{z} + \frac{1}{i_R^2} \cdot \Delta \bar{\theta}$$

$$\cdot (1_1 \cdot \bar{\omega}_1^2 + 1_2 \cdot \bar{\omega}_2^2) \cdot \Delta \bar{\theta} + [1_1 + (1-I) \cdot 1] \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot \gamma_1 \cdot \Delta \bar{p}_1 + [1_{R2} \cdot (1-I) + 1 \cdot 1_2] \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot \gamma_2 \cdot \Delta \bar{p}_2$$

$$- \frac{1}{i_R^2} \cdot 2 \cdot h_3 \cdot \bar{\omega}_3 \cdot \bar{\zeta}_3 \cdot \Delta \bar{x}' - \frac{1}{i_R^2} \cdot \bar{\omega}_3^2 \cdot h_3 \cdot \Delta \bar{x} + \frac{1}{i_R^2} \cdot \gamma_3 \cdot \Delta \bar{p}_3 \cdot h_3$$

$$+ (1-I) \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot \frac{\delta}{M} \cdot \bar{F}_{Rz} + (1-I) \cdot \frac{h_R}{i_R^2} \cdot \frac{\delta}{M} \cdot \bar{F}_{Rx} + (1-I) \cdot \frac{\delta}{M} \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot \bar{M}_{Ry} = 0$$

Durch Sortieren ergeben sich die endgültigen Bewegungsgleichungen:

$$\Delta \bar{z}'' = - \frac{2}{1-M} (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2) \Delta \bar{z}' + \frac{2}{1-M} (1_1 \cdot \bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + 1_2 \cdot \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2) \cdot \Delta \bar{\theta}' - \frac{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2}{1-M} \cdot \Delta \bar{z} + \frac{1_1 \cdot \bar{\omega}_1^2 + 1_2 \cdot \bar{\omega}_2^2}{1-M} \cdot \Delta \bar{\theta} + \frac{\gamma_1}{1-M} \cdot \Delta \bar{p}_1$$

$$+ \frac{\gamma_2}{1-M} \cdot \Delta \bar{p}_2 - \frac{\delta}{M} \bar{F}_{Rz}$$

$$\Delta \bar{x}'' = - \frac{2 \cdot \bar{\omega}_3 \zeta_3}{1-M} \frac{\bar{\omega}_3}{\Delta x} - \frac{\bar{\omega}_3}{1-M} \frac{\Delta x}{\Delta x} + \frac{\gamma_3}{1-M} \cdot \Delta \bar{p}_3 + \frac{\delta}{M} \bar{F}_{Rx}$$

$$\Delta \bar{\theta}'' = \frac{L}{i_R^2} \cdot \frac{2 \cdot (\bar{\omega}_1 \zeta_1^* + \bar{\omega}_2^* \zeta_2^*)}{(1-I)} \cdot \Delta z - \frac{L}{i_R^2} \cdot \frac{2(1 \cdot \bar{\omega}_1^* \zeta_1^* + 1 \cdot \bar{\omega}_2^* \zeta_2^*)}{(1-I)} \cdot \Delta \theta$$

$$+ \frac{L}{i_R^2} \cdot \frac{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2}{1-I} \cdot \Delta z - \frac{L}{i_R^2} \cdot \frac{(1 \cdot \bar{\omega}_1^2 + 1 \cdot \bar{\omega}_2^2)}{1-I} \cdot \Delta \theta + \frac{I}{i_R^2} h_3 \cdot \frac{2(\bar{\omega}_3 \zeta_3)}{1-I} \cdot \Delta x$$

$$+ \frac{I}{i_R^2} h_3 \frac{\bar{\omega}_3}{1-I} \cdot \Delta x - \frac{1 \cdot (1-I) \cdot 1}{1-I} \frac{1}{i_R^2} \gamma_1 \cdot \Delta \bar{p}_1 - \frac{-1 \cdot R_2 \cdot (1-I) + I \cdot 1 \cdot 2}{1-I} \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot \gamma_2 \Delta \bar{p}_2$$

$$- \frac{I \cdot h_3}{1-I} \frac{\gamma_3}{i_R^2} \Delta \bar{p}_3 - \frac{1}{i_R^2} \cdot \frac{\delta}{M} \cdot \bar{F}_{Rz} - \frac{h_R}{i_R^2} - \frac{\delta}{M} \bar{F}_{Rx} - \frac{1}{i_R^2} \bar{M}_{Ry}$$

Aus den Kraftgesetzen folgt: (Gleichung für Δp siehe Seite 16)

$$\Delta \bar{p}_1' = - \frac{1}{\bar{\tau}_1} \cdot \Delta \bar{p}_1 + \bar{k}_1^* \cdot \bar{k}_{\varepsilon 1} \cdot \bar{\varepsilon}_1 - \bar{k}_1^* \cdot \bar{A}_1^* \cdot \Delta \bar{z}' + \bar{k}_1^* \cdot \bar{A}_1^* \cdot 1_1 \cdot \Delta \bar{\theta}'$$

$$\Delta \bar{p}_2' = - \frac{1}{\bar{\tau}_2} \cdot \Delta \bar{p}_2 + \bar{k}_2^* \cdot \bar{k}_{\varepsilon 2} \cdot \bar{\varepsilon}_2 - \bar{k}_2^* \cdot \bar{A}_2^* \cdot \Delta \bar{z}' + \bar{k}_2^* \cdot \bar{A}_2^* \cdot 1_2 \cdot \Delta \bar{\theta}'$$

$$\Delta \bar{p}_3' = - \frac{1}{\bar{\tau}_3} \cdot \Delta \bar{p}_3 + \bar{k}_3^* \cdot \bar{k}_{\varepsilon 3} \cdot \bar{\varepsilon}_3 - \bar{k}_3^* \cdot \bar{A}_3^* \cdot \Delta \bar{x}'$$

$$\bar{\varepsilon}_1'' = - 2 \cdot \zeta_{sv_1} \cdot \bar{\omega}_{sv_1} \cdot \bar{\varepsilon}_1' - \bar{\omega}_{sv_1}^2 \cdot \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\omega}_{sv_1}^2 \cdot \bar{k}_{i1} \cdot \bar{i}_1$$

$$\bar{\varepsilon}_2'' = - 2 \cdot \zeta_{sv_2} \cdot \bar{\omega}_{sv_2} \cdot \bar{\varepsilon}_2' - \bar{\omega}_{sv_2}^2 \cdot \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\omega}_{sv_2}^2 \cdot \bar{k}_{i2} \cdot \bar{i}_2$$

$$\bar{\varepsilon}_3'' = - 2 \cdot \zeta_{sv_3} \cdot \bar{\omega}_{sv_3} \cdot \bar{\varepsilon}_3' - \bar{\omega}_{sv_3}^2 \cdot \bar{\varepsilon}_3 + \bar{\omega}_{sv_3}^2 \cdot \bar{k}_{i3} \cdot \bar{i}_3$$

Dabei wurden zusätzlich folgende Substitutionen verwendet:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\delta_1} ; \quad \bar{i} = \frac{i}{i_{\max}} ; \quad \bar{\omega}_{sv_i} = \frac{\omega_{sv_i}}{\Omega}$$

$$\bar{\tau} = \tau \cdot \Omega ; \quad \bar{k}_{ij} = \frac{k_{ij}}{\delta_1} \cdot i_{\max} ; \quad \bar{k}_j^* = \frac{k_j^*}{\Omega}$$

$$\bar{k}_{\varepsilon i} = \frac{k_{\varepsilon i}}{\Delta p_{\max}} \cdot \delta_1 ; \quad \bar{A}_j^* = \frac{A_j \cdot \delta_1 \cdot \Omega}{\Delta p_{\max}}$$

Allgemein lassen sich die Kraftgesetze in folgender Form anschreiben:

$$\bar{w}' = \underline{G} \cdot \bar{w} + \underline{F} \cdot \bar{y} + \underline{G}_1 \cdot \bar{i}$$

Durch Umformung werden die Gleichungen für die Dynamik der Aktuatoren in folgende Form gebracht:

$$\begin{aligned}\Delta \bar{p}_1''' &= - \left(\frac{1}{\tau_1} + 2 \cdot \zeta_{sv_1} \cdot \bar{\omega}_{sv_1} \right) \cdot \Delta \bar{p}_1'' - \left(\frac{2}{\tau_1} \cdot \zeta_{sv_1} \cdot \bar{\omega}_{sv_1} + \bar{\omega}_{sv_1}^2 \right) \cdot \Delta \bar{p}_1' \\ &\quad - \frac{\bar{\omega}_{sv_1}^2}{\tau_1} \cdot \Delta \bar{p}_1 - \bar{Q}_{q1} \cdot \Delta \bar{z}''' - 2 \cdot \zeta_{sv_1} \cdot \bar{\omega}_{sv_1} \cdot \bar{Q}_{q1} \cdot \Delta \bar{z}'' - \bar{\omega}_{sv_1}^2 \cdot \bar{Q}_{q1} \cdot \Delta \bar{z}' \\ &\quad + l_1 \cdot \bar{Q}_{q1} \cdot \Delta \bar{\theta}''' + 2 \cdot \zeta_{sv_1} \cdot \bar{\omega}_{sv_1} \cdot \bar{Q}_{q1} \cdot l_1 \cdot \Delta \bar{\theta}'' + \bar{\omega}_{sv_1}^2 \cdot \bar{Q}_{q1} \cdot l_1 \cdot \Delta \bar{\theta}' \\ &\quad + \bar{\omega}_{sv_1}^2 \cdot \bar{Q}_{p1} \cdot \bar{i}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \bar{p}_2''' &= - \left(\frac{1}{\tau_2} + 2 \cdot \zeta_{sv_2} \cdot \bar{\omega}_{sv_2} \right) \cdot \Delta \bar{p}_2'' - \left(\frac{2}{\tau_2} \cdot \zeta_{sv_2} \cdot \bar{\omega}_{sv_2} + \bar{\omega}_{sv_2}^2 \right) \cdot \Delta \bar{p}_2' \\ &\quad - \frac{\bar{\omega}_{sv_2}^2}{\tau_2} \cdot \Delta \bar{p}_2 - \bar{Q}_{q2} \cdot \Delta \bar{z}''' - 2 \cdot \zeta_{sv_2} \cdot \bar{\omega}_{sv_2} \cdot \bar{Q}_{q2} \cdot \Delta \bar{z}'' - \bar{\omega}_{sv_2}^2 \cdot \bar{Q}_{q2} \cdot \Delta \bar{z}' \\ &\quad + l_2 \cdot \bar{Q}_{q2} \cdot \Delta \bar{\theta}''' + 2 \cdot \zeta_{sv_2} \cdot \bar{\omega}_{sv_2} \cdot \bar{Q}_{q2} \cdot l_2 \cdot \Delta \bar{\theta}'' + \bar{\omega}_{sv_2}^2 \cdot \bar{Q}_{q2} \cdot l_2 \cdot \Delta \bar{\theta}' \\ &\quad + \bar{\omega}_{sv_2}^2 \cdot \bar{Q}_{p2} \cdot \bar{i}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \bar{p}_3''' &= - \left(\frac{1}{\tau_3} + 2 \cdot \zeta_{sv_3} \cdot \bar{\omega}_{sv_3} \right) \cdot \Delta \bar{p}_3'' - \left(\frac{2}{\tau_3} \cdot \zeta_{sv_3} \cdot \bar{\omega}_{sv_3} + \bar{\omega}_{sv_3}^2 \right) \cdot \Delta \bar{p}_3' \\ &\quad - \frac{\bar{\omega}_{sv_3}^2}{\tau_3} \cdot \Delta \bar{p}_3 - \bar{Q}_{q3} \cdot \Delta \bar{x}''' - 2 \cdot \zeta_{sv_3} \cdot \bar{\omega}_{sv_3} \cdot \bar{Q}_{q3} \cdot \Delta \bar{x}'' - \bar{\omega}_{sv_3}^2 \cdot \bar{Q}_{q3} \cdot \Delta \bar{x}' \\ &\quad + \bar{\omega}_{sv_3}^2 \cdot \bar{Q}_{p3} \cdot \bar{i}_3\end{aligned}$$

Darin sind:

$$Q_{pj} = \frac{\partial p_j}{\partial i_j} \quad Q_{qj} = \frac{1}{k_{pj} + c_{Lj}} \quad \bar{Q}_{pj} = \frac{i_{\max} \cdot Q_{pj}}{\Delta p_{\max} \cdot \tau_j} \quad \bar{Q}_{qj} = \frac{\delta_1 \cdot \Omega \cdot Q_{qj} \cdot A_j}{\Delta p_{\max} \cdot \tau_j}$$

Damit liegt die erweiterte Bewegungsgleichung, aufgebaut aus zwei miteinander gekoppelten Differentialgleichungssystemen, für das Mehrachsensystem mit starrer Zellenmodellierung vor.

[illegible]

In Kurzform: $\underline{w}' = \underline{G} \cdot \underline{w} + \underline{F} \cdot \underline{y} + \underline{G}_1 \cdot \underline{i}$

Das erweiterte Bewegungsgleichungssystem, welches sich aus den miteinander gekoppelten Differentialgleichungssystemen

$$\underline{y}' = \underline{D} \cdot \underline{y} + \underline{R} \cdot \underline{w} + \underline{B}_v \cdot \underline{v} \quad (a)$$

$$\underline{\bar{w}}' = \underline{G} \cdot \underline{\bar{w}} + \underline{F} \cdot \underline{\bar{y}} + \underline{G}_1 \cdot \underline{\bar{i}} \quad (b)$$

aufbaut, errechnet sich wie folgt:

Aus (a) bekommt man mit der Einführung des Vektors

$$\underline{z}^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{z}'', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{x}'', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \Delta \bar{\theta}'']$$

$$\underline{z}' = \underline{\bar{D}} \cdot \underline{z} + \underline{\bar{R}} \cdot \underline{\bar{w}} + \underline{\bar{B}}_v \cdot \underline{\bar{v}} \quad (a')$$

Das Differentialgleichungssystem (b) läßt sich damit in die Form

$$\underline{\bar{w}}' = \underline{G} \cdot \underline{\bar{w}} + \underline{F} \cdot \underline{z}' + \underline{G}_1 \cdot \underline{\bar{i}} = (\underline{G} + \underline{F} \cdot \underline{\bar{R}}) \cdot \underline{\bar{w}} + \underline{F} \cdot \underline{\bar{D}} \cdot \underline{z} + \underline{F} \cdot \underline{\bar{B}}_v \cdot \underline{\bar{v}} + \underline{G}_1 \cdot \underline{\bar{i}} \quad (b')$$

bringen.

Mit dem Zustandsvektor

$$\underline{x}_s = \begin{bmatrix} \underline{z} \\ \underline{\bar{w}} \end{bmatrix} \quad \text{wird:}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{z} \\ \underline{\bar{w}} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \underline{\bar{D}} & \underline{\bar{R}} \\ \underline{F} \cdot \underline{\bar{D}} & \underline{G} + \underline{F} \cdot \underline{\bar{R}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{z} \\ \underline{\bar{w}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{G}_1 \end{bmatrix} \cdot \underline{\bar{i}} + \begin{bmatrix} \underline{\bar{B}}_v \\ \underline{F} \cdot \underline{\bar{B}}_v \end{bmatrix} \cdot \underline{\bar{v}}$$

bzw. in Kurzform

$$\underline{x}_s' = \underline{A}_s \cdot \underline{x}_s + \underline{B}_s \cdot \underline{\bar{i}} + \underline{B}_{vs} \cdot \underline{\bar{v}}$$

$$\text{mit } \underline{A}_s = \begin{bmatrix} \underline{\bar{D}} & \underline{\bar{R}} \\ \underline{F} \cdot \underline{\bar{D}} & \underline{G} + \underline{F} \cdot \underline{\bar{R}} \end{bmatrix}; \quad \underline{B}_s = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{G}_1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B}_{vs} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{B}}_v \\ \underline{F} \cdot \underline{\bar{B}}_v \end{bmatrix}$$

2.1 Aufstellen des vollständigen Gleichungssystems für das dreiachsige

Funktionsmodell bei starrer Zellenmodellierung:

(erste Form mit $\underline{x}_s^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{z}'', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{x}'', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \Delta \bar{\theta}'', \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_1', \Delta \bar{p}_1'', \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_2', \Delta \bar{p}_2'', \Delta \bar{p}_3, \Delta \bar{p}_3', \Delta \bar{p}_3'']$).

Die Differentialgleichungen für das dreiachsige Funktionsmodell und des elektrohydraulischen Servozyylinder bei starrer Zellenmodellierung wurden in Abschnitt 2 in die Form

$$\frac{d}{d\psi} \underline{x}_s = \underline{A}_s \cdot \underline{x}_s + \underline{B}_s \cdot \underline{i} + \underline{B}_{vs} \cdot \underline{v}$$

zusammengefaßt, wobei die Bezeichnungen

\underline{x}_s = Zustandsvektor der Strecke

\underline{A}_s = Systemmatrix der Strecke

\underline{B}_s = Steuereingangsmatrix der Strecke

\underline{i} = Steuergröße (Vektor)

\underline{B}_{vs} = Störeingangsmatrix der Strecke und

\underline{v} = Störgröße (Vektor)

gelten.

Wobei folgende Matrizenbeziehungen bestehen:

$$\underline{A}_s = \begin{bmatrix} \underline{\bar{D}} & \underline{\bar{R}} \\ \underline{F} \cdot \underline{\bar{D}} & \underline{G} + \underline{F} \cdot \underline{\bar{R}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_s = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{G}_i \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$\underline{B}_{vs} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{B}}_v \\ \underline{F} \cdot \underline{\bar{B}}_v \end{bmatrix}$$

Darin sind:

$$\underline{x}_S^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{z}'', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{x}'', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \Delta \bar{\theta}'', \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_1', \Delta \bar{p}_1'', \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_2', \Delta \bar{p}_2'', \Delta \bar{p}_3, \Delta \bar{p}_3', \Delta \bar{p}_3'']$$

$$\underline{i}^T = [\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3]$$

$$\underline{v}^T = [\bar{F}_{Rz}, \bar{F}'_{Rz}, \bar{F}''_{Rz}, \bar{F}_{Rx}, \bar{F}'_{Rx}, \bar{F}''_{Rx}, \bar{F}_{Ry}, \bar{F}'_{Ry}, \bar{F}''_{Ry}, \bar{M}_{Ry}, \bar{M}'_{Ry}, \bar{M}''_{Ry}]$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2}{1-M} & -\frac{2}{1-M} \cdot (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2) & 0 & 0 & 0 & \frac{1 \cdot \bar{\omega}_1^2 + 1 \cdot \bar{\omega}_2^2}{1-M} & 0 & \frac{2}{1-M} (1_1 \cdot \bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + 1_2 \cdot \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2) \\ 0 & -\frac{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2}{1-M} & -\frac{2}{1-M} \cdot (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{1-M} (1_1 \cdot \bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + 1_2 \cdot \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{\omega}_3^2}{1-M} & -\frac{2}{1-M} \cdot \bar{\omega}_3 \cdot \bar{\zeta}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{\omega}_3^2}{1-M} & -\frac{2}{1-M} \cdot \bar{\omega}_3 \cdot \bar{\zeta}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2}{1-I} & \frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{2 \cdot (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2)}{1-I} & \frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{\bar{\omega}_3^2}{1-I} & \frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{2 \cdot \bar{\omega}_3 \cdot \bar{\zeta}_3}{1-I} & \frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{2 \cdot \bar{\omega}_3 \cdot \bar{\zeta}_3 \cdot h_3}{1-I} & -\frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{1 \cdot \bar{\omega}_1^2 + 1 \cdot \bar{\omega}_2^2}{1-I} & -\frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{2 \cdot (1_1 \cdot \bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + 1_2 \cdot \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2)}{1-I} & 0 \\ 0 & \frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2}{1-I} & 0 & \frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{\bar{\omega}_3^2 \cdot h_3}{1-I} & \frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{2 \cdot \bar{\omega}_3 \cdot \bar{\zeta}_3 \cdot h_3}{1-I} & 0 & -\frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{1 \cdot \bar{\omega}_1^2 + 1 \cdot \bar{\omega}_2^2}{1-I} & -\frac{L}{i^2_R} \cdot \frac{2 \cdot (1_1 \cdot \bar{\omega}_1 \cdot \bar{\zeta}_1 + 1_2 \cdot \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\zeta}_2)}{1-I} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\delta}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{i^2_R} \frac{\delta}{M} & 0 & 0 & -\frac{h_R}{i^2_R} \frac{\delta}{M} & 0 & 0 & -\frac{1}{i^2_R} \frac{\delta}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Matrizen \underline{G} , \underline{F} und \underline{G}_1 sind auf Seite 31 zu finden.

Als Ausgangsgröße des Systems wurden zuerst die relativen Verschiebungen $\Delta \bar{z}$ und $\Delta \bar{x}$, die relative Drehung $\Delta \bar{\theta}$ und die Isolatorenkräfte \bar{F}_{I1} , \bar{F}_{I2} und \bar{F}_{I3} gewählt.

Dabei wurden die Isolatorenkräfte in die normierte Form gebracht.

$$\bar{F}_{I1} = - \Delta \bar{p}_1 \cdot \bar{A}_1 + \bar{k}_1 \cdot \Delta \bar{z} - \bar{k}_1 \cdot l_1 \cdot \Delta \bar{\theta} + \bar{d}_1 \cdot \Delta \bar{z}' - \bar{d}_1 \cdot l_1 \cdot \Delta \bar{\theta}'$$

$$\bar{F}_{I2} = - \Delta \bar{p}_2 \cdot \bar{A}_2 + \bar{k}_2 \cdot \Delta \bar{z} - \bar{k}_2 \cdot l_2 \cdot \Delta \bar{\theta} + \bar{d}_2 \cdot \Delta \bar{z}' - \bar{d}_2 \cdot l_2 \cdot \Delta \bar{\theta}'$$

$$\bar{F}_{I3} = - \Delta \bar{p}_3 \cdot \bar{A}_3 + \bar{k}_3 \cdot \Delta \bar{x} + \bar{d}_3 \cdot \Delta \bar{x}'$$

$$\text{mit } \bar{F}_{Ij} = \frac{F_{Ij}}{m \cdot g}$$

$$\bar{A}_j = \frac{A_j \cdot \Delta p_{\max}}{m \cdot g} = \frac{\gamma_j}{\delta} \cdot M$$

$$\bar{k}_j = \frac{\bar{\omega}_j^2 \cdot m_R \cdot \delta_1 \cdot \Omega^2}{m \cdot g} = \frac{\bar{\omega}_j^2 \cdot M}{\delta} \quad \text{und}$$

$$\bar{d}_j = \frac{2 \cdot \bar{\omega}_j \cdot \zeta_j \cdot m_R \cdot \Omega \cdot \delta_1}{m \cdot g} = \frac{2 \cdot \bar{\omega}_j \cdot \zeta_j \cdot M}{\delta}$$

In Matrizenschreibweise werden die Ausgangsgrößen allgemein als

$$\underline{y}_S = \underline{C}_S \cdot \underline{x}_S + \underline{D}_S \cdot \underline{\dot{i}} \quad \text{angeschrieben,}$$

worin sind:

$$\underline{y}_S = \text{Ausgangsvektor der Strecke}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{C}_S \\ \underline{D}_S \end{array} \right\} = \text{Ausgangsmatrizen der Strecke}$$

Die Zellenbeschleunigungen am Schwerpunkt der Zelle in z_z - und x_z -Richtung errechnen sich zu:

$$\ddot{z}_z'' = \frac{\delta}{1-M} (\bar{F}_{I1} + \bar{F}_{I2}) \quad \text{mit} \quad \ddot{z}_z'' = \frac{\ddot{z}_z}{\delta_1 \cdot \Omega^2}$$

$$\ddot{x}_z'' = - \frac{\delta}{1-M} \cdot \bar{F}_{I3} \quad \text{mit} \quad \ddot{x}_z'' = \frac{\ddot{x}_z}{\delta_1 \cdot \Omega^2}$$

$\Delta \bar{z}$	$\Delta \bar{z}'$	$\Delta \bar{z}''$	$\Delta \bar{x}$	$\Delta \bar{x}'$	$\Delta \bar{x}''$	$\Delta \bar{\theta}$	$\Delta \bar{\theta}'$	$\Delta \bar{\theta}''$	$\Delta \bar{p}_1$	$\Delta \bar{p}_1'$	$\Delta \bar{p}_1''$	$\Delta \bar{p}_2$	$\Delta \bar{p}_2'$	$\Delta \bar{p}_2''$	$\Delta \bar{p}_3$	$\Delta \bar{p}_3'$	$\Delta \bar{p}_3''$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
\bar{k}_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
\bar{k}_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\delta}{1-M} \cdot (\bar{k}_1 + \bar{k}_2) \frac{\delta}{1-M} (\bar{d}_1 + \bar{d}_2)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

In Kurzform $y_s = \frac{C}{s} \cdot x_s$, da $\frac{D}{s} = 0$

2.1.1 Erste Näherung ($\bar{\omega}_{svj}^2 \rightarrow \infty$), $\underline{x}_{s1}^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_1', \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_2', \Delta \bar{p}_3, \Delta \bar{p}_3']$

Mit der Annahme, daß die Eigenfrequenzen der Servoventile ω_{svj} sehr hoch sind, d.h. die Zeitkonstanten τ_j der Aktuatoren, welche die Federsteifigkeiten des Öls und der Rotor-Zellenanschlüsse als reziproke Werte beinhalten, als sehr klein anzusehen sind, vereinfacht sich die Servozyylinder-Dynamik wie folgt:

Mit $\bar{\omega}_{svj}^2 \rightarrow \infty$ bzw. $\bar{\tau}_j \ll 1$ wird

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p}_1'' = & - \left(\frac{1}{\bar{\tau}_1} + \frac{\bar{\omega}_{sv1}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv1}} \right) \cdot \Delta \bar{p}_1' - \frac{\bar{\omega}_{sv1}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv1} \cdot \bar{\tau}_1} \Delta \bar{p}_1 - \bar{Q}_{q1} \cdot \Delta \bar{z}'' + \bar{Q}_{q1} \cdot l_1 \cdot \Delta \bar{\theta}'' \\ & - \bar{Q}_{q1} \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv1}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv1}} \cdot \Delta \bar{z}' + \bar{Q}_{q1} \cdot l_1 \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv1}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv1}} \Delta \bar{\theta}' + \bar{Q}_{p1} \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv1}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv1}} \cdot \bar{i}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p}_2'' = & - \left(\frac{1}{\bar{\tau}_2} + \frac{\bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv2}} \right) \cdot \Delta \bar{p}_2' - \frac{\bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv2} \cdot \bar{\tau}_2} \Delta \bar{p}_2 - \bar{Q}_{q2} \cdot \Delta \bar{z}'' + \bar{Q}_{q2} \cdot l_2 \cdot \Delta \bar{\theta}'' \\ & - \bar{Q}_{q2} \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv2}} \cdot \Delta \bar{z}' + \bar{Q}_{q2} \cdot l_2 \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv2}} \cdot \Delta \bar{\theta}' + \bar{Q}_{p2} \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv2}} \cdot \bar{i}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p}_3'' = & - \left(\frac{1}{\bar{\tau}_3} + \frac{\bar{\omega}_{sv3}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv3}} \right) \cdot \Delta \bar{p}_3' - \frac{\bar{\omega}_{sv3}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv3} \cdot \bar{\tau}_3} \cdot \Delta \bar{p}_3 - \bar{Q}_{q3} \cdot \Delta \bar{x}'' - \bar{Q}_{q3} \frac{\bar{\omega}_{sv3}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv3}} \Delta \bar{x}' \\ & + \bar{Q}_{p3} \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv3}}{2 \cdot \bar{\zeta}_{sv3}} \cdot \bar{i}_3 \end{aligned}$$

Das Differentialgleichungssystem der Servozyylinder-Dynamik lautet:

$$\underline{\bar{x}}_1' = \underline{G}_1 \cdot \underline{\bar{x}}_1 + \underline{F}_1 \cdot \underline{\bar{y}}_1 + \underline{G}_{i1} \cdot \underline{\bar{i}}$$

Mit der Einführung des Vektors $\underline{z}_1^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}']$

kann man das Bewegungsdifferentialgleichungs-System in der Form

$$\underline{z}_1' = \underline{\bar{D}}_1 \cdot \underline{z}_1 + \underline{\bar{R}}_1 \cdot \underline{\bar{w}}_1 + \underline{\bar{B}}_{v1} \cdot \underline{\bar{v}} \text{ ausschreiben.}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \underline{\bar{w}}_1' = \underline{G}_1 \cdot \underline{\bar{w}}_1 + \underline{F}_1 \cdot \underline{z}_1' + \underline{G}_{i1} \cdot \underline{\bar{i}} = \underline{G}_1 \cdot \underline{\bar{w}}_1 + \underline{F}_1 (\underline{\bar{D}}_1 \cdot \underline{z}_1 + \underline{\bar{R}}_1 \cdot \underline{\bar{w}}_1 + \underline{\bar{B}}_{v1} \cdot \underline{\bar{v}}) \\ + \underline{G}_{i1} \cdot \underline{\bar{i}} \end{aligned}$$

Durch Bildung des Zustandsvektors $\underline{x}_{s1} = \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{\bar{w}}_1 \end{bmatrix}$

bekommt man:

$$\begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{\bar{w}}_1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \underline{\bar{D}}_1 & \underline{\bar{R}}_1 \\ \underline{F}_1 \cdot \underline{\bar{D}}_1 & \underline{G}_1 + \underline{F}_1 \cdot \underline{\bar{R}}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{\bar{w}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{G}_{i1} \end{bmatrix} \cdot \underline{\bar{i}} + \begin{bmatrix} \underline{\bar{B}}_{v1} \\ \underline{F}_1 \cdot \underline{\bar{B}}_{v1} \end{bmatrix} \cdot \underline{\bar{v}}_1$$

In Kurzform: $\underline{x}_{s1}' = \underline{A}_{s1} \cdot \underline{x}_{s1} + \underline{B}_{s1} \cdot \underline{\bar{i}} + \underline{B}_{v s1} \cdot \underline{\bar{v}}_1$

Darin sind:

$$\underline{A}_{s1} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{D}}_1 & \underline{\bar{R}}_1 \\ \underline{F}_1 \cdot \underline{\bar{D}}_1 & \underline{G}_1 + \underline{F}_1 \cdot \underline{\bar{R}}_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_{s1} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{G}_{i1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_{v s1} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{B}}_{v1} \\ \underline{F}_1 \cdot \underline{\bar{B}}_{v1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{s1}^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_1', \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_2', \Delta \bar{p}_3, \Delta \bar{p}_3']$$

$n = 12$

$$\underline{\bar{i}}^T = [\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3]$$

$$\underline{\bar{v}}_1^T = [\bar{F}_{Rz}, \bar{F}_{Rx}, \bar{M}_{Ry}]$$

$$\underline{\bar{D}}_1 = \underline{\bar{D}} \quad (\text{ Seite } 35)$$

$$\underline{\bar{B}}_{v1} = \underline{\bar{B}}_v \quad (\text{ Seite } 37)$$

$$\underline{\bar{R}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma_1}{1-M} & 0 & \frac{\gamma_1}{1-M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_3}{1-M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1_1 - (1-I) \cdot 1}{1-I} \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot \gamma_1 & 0 & -\frac{-1_{R2} \cdot (1-I) + I \cdot 1_2}{1-I} \cdot \frac{1}{i_R^2} \cdot \gamma_2 & 0 & -\frac{I \cdot h_3}{1-I} \cdot \frac{\gamma_3}{i_R^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{G}_1 = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{\omega}_{sv1}}{2 \cdot \zeta_{sv1} \cdot \bar{\tau}_1} - \left(\frac{1}{\bar{\tau}_1} + \frac{\bar{\omega}_{sv1}}{2 \cdot \zeta_{sv1}} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \zeta_{sv2} \cdot \bar{\tau}_2} - \left(\frac{1}{\bar{\tau}_2} + \frac{\bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \zeta_{sv2}} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\bar{\omega}_{sv3}}{2 \cdot \zeta_{sv3} \cdot \bar{\tau}_3} - \left(\frac{1}{\bar{\tau}_3} + \frac{\bar{\omega}_{sv3}}{2 \cdot \zeta_{sv3}} \right) & 0 \end{bmatrix} \\
 \underline{F}_1 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{Q}_{q1} \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv1}}{2 \cdot \zeta_{sv1}} - \bar{Q}_{q1} & 0 & 0 & \bar{Q}_{q1} \cdot \frac{l_1 \cdot \bar{\omega}_{sv1}}{2 \cdot \zeta_{sv1}} & \bar{Q}_{q1} \cdot l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{Q}_{q2} \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \zeta_{sv2}} - \bar{Q}_{q2} & 0 & 0 & \bar{Q}_{q2} \cdot \frac{l_2 \cdot \bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \zeta_{sv2}} & \bar{Q}_{q2} \cdot l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{Q}_{q3} \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv3}}{2 \cdot \zeta_{sv3}} - \bar{Q}_{q3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\underline{G}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{p1} \cdot \frac{\omega_{sv1}}{2 \cdot \zeta_{sv1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{p2} \cdot \frac{\omega_{sv2}}{2 \cdot \zeta_{sv2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{p3} \cdot \frac{\omega_{sv3}}{2 \cdot \zeta_{sv3}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta z} \\ \bar{\Delta x} \\ \bar{\Delta \theta} \\ \bar{F}_{I1} \\ \bar{F}_{I2} \\ \bar{F}_{I3} \\ \bar{z}'' \\ \bar{x}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k}_1 & 0 & 0 & -l_1 \bar{k}_1 & -l_1 \bar{d}_1 & -\bar{A}_1 & 0 & 0 \\ \bar{k}_2 & 0 & 0 & -l_2 \bar{k}_2 & -l_2 \bar{d}_2 & 0 & -\bar{A}_2 & 0 \\ 0 & \bar{k}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{A}_3 \\ \frac{\delta}{1-M}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) & 0 & 0 & -\frac{\delta}{1-M}(l_1 \bar{k}_1 + l_2 \bar{k}_2) & -\frac{\delta}{1-M}(l_1 \bar{d}_1 + l_2 \bar{d}_2) & -\frac{\delta}{1-M} \bar{A}_1 & -\frac{\delta}{1-M} \bar{A}_2 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{1-M} \bar{k}_3 & \frac{\delta}{1-M} \bar{d}_3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta}{1-M} \bar{A}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta z} \\ \bar{\Delta x} \\ \bar{\Delta \theta} \\ \bar{\Delta p}_1 \\ \bar{\Delta p}_2 \\ \bar{\Delta p}_2 \\ \bar{\Delta p}_3 \\ \bar{\Delta p}_3 \end{bmatrix}$$

In Kurzform: $\bar{y}_{s1} = \bar{c}_{s1} \cdot \bar{x}_1$

2.1.2 Zweite Näherung ($\bar{\omega}_{svj} \rightarrow \infty$), $\underline{\bar{x}}_{s2}^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_3]$

Mit $\bar{\omega}_{svj} \rightarrow \infty$ ($\hat{=} \bar{\epsilon}_j = \bar{k}_{ij} \cdot \bar{i}_j$) wird

$$\Delta \bar{p}_1' = -\frac{1}{\bar{\tau}_1} \cdot \Delta \bar{p}_1 - \bar{Q}_{q1} \cdot \Delta \bar{z}' + l_1 \cdot \bar{Q}_{q1} \cdot \Delta \bar{\theta}' + \bar{Q}_{p1} \cdot \bar{i}_1$$

$$\Delta \bar{p}_2' = -\frac{1}{\bar{\tau}_2} \cdot \Delta \bar{p}_2 - \bar{Q}_{q2} \cdot \Delta \bar{z}' + l_2 \cdot \bar{Q}_{q2} \cdot \Delta \bar{\theta}' + \bar{Q}_{p2} \cdot \bar{i}_2$$

$$\Delta \bar{p}_3' = -\frac{1}{\bar{\tau}_3} \cdot \Delta \bar{p}_3 - \bar{Q}_{q3} \cdot \Delta \bar{x}' + \bar{Q}_{p3} \cdot \bar{i}_3$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_1' \\ \Delta \bar{p}_2' \\ \Delta \bar{p}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\bar{\tau}_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\bar{\tau}_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\bar{\tau}_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_1 \\ \Delta \bar{p}_2 \\ \Delta \bar{p}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\bar{Q}_{q1} & 0 & 0 & 0 & + l_1 \cdot \bar{Q}_{q1} \\ 0 & -\bar{Q}_{q2} & 0 & 0 & 0 & + l_2 \cdot \bar{Q}_{q2} \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{Q}_{q3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{z} \\ \Delta \bar{z}' \\ \Delta \bar{x} \\ \Delta \bar{x}' \\ \Delta \bar{\theta} \\ \Delta \bar{\theta}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{p3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_3 \end{bmatrix}$$

In Kurzform: $\underline{\bar{M}}' = \underline{G}_2 \cdot \underline{\bar{M}} + \underline{F}_2 \cdot \underline{\bar{y}} + \underline{G}_{i2} \cdot \underline{\bar{i}}$

Mit $\underline{y}' = \underline{D} \cdot \underline{y} + \underline{R} \cdot \underline{w} + \underline{B}_v \cdot \underline{v}$

(Seite 32)

bekommt man das Differentialgleichungssystem der zweiten Näherung in die Form:

$$\begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{w} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{R} \\ \underline{F}_2 & \underline{G}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{G}_{i2} \end{bmatrix} \cdot \underline{\dot{i}} + \begin{bmatrix} \underline{B}_v \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{v}$$

bzw. in Kurzform: $\underline{x}_{s2}' = \underline{A}_{s2} \cdot \underline{x}_{s2} + \underline{B}_{s2} \cdot \underline{\dot{i}} + \underline{B}_{vs2} \cdot \underline{v}$

Worin sind:

$$\underline{A}_{s2} = \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{R} \\ \underline{F}_2 & \underline{G}_2 \end{bmatrix}; \quad \underline{B}_{s2} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{G}_{i2} \end{bmatrix}; \quad \underline{B}_{vs2} = \begin{bmatrix} \underline{B}_v \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{s2}^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_3]$$

$$\underline{\dot{i}}^T = [\dot{i}_1, \dot{i}_2, \dot{i}_3]$$

$$\underline{v}^T = [\bar{F}_{Rz}, \bar{F}_{Rx}, \bar{M}_{Ry}]$$

Ausgangsgrößen:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta z} \\ \bar{\Delta x} \\ \bar{\Delta \theta} \\ \bar{F}_{I1} \\ \bar{F}_{I2} \\ \bar{F}_{I3} \\ \bar{z}_z'' \\ \bar{x}_z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k}_1 & \bar{d}_1 & 0 & 0 & -\bar{l}_1 \cdot \bar{k}_1 & -\bar{l}_2 \cdot \bar{d}_2 & -\bar{A}_1 & 0 \\ \bar{k}_2 & \bar{d}_2 & 0 & 0 & -\bar{l}_2 \cdot \bar{k}_2 & -\bar{l}_2 \cdot \bar{d}_2 & -\bar{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_3 & \bar{d}_3 & 0 & 0 & 0 & -\bar{A}_3 \\ \frac{\delta}{1-M}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) & \frac{\delta}{1-M}(\bar{d}_1 + \bar{d}_2) & 0 & 0 & -\frac{\delta}{1-M}(\bar{l}_1 \cdot \bar{k}_1 + \bar{l}_2 \cdot \bar{k}_2) & -\frac{\delta}{1-M}(\bar{l}_1 \cdot \bar{d}_1 + \bar{l}_2 \cdot \bar{d}_2) & 0 & -\frac{\delta}{1-M} \bar{A}_2 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{1-M} \bar{k}_3 & \frac{\delta}{1-M} \bar{d}_3 & 0 & 0 & -\frac{\delta}{1-M} \bar{A}_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta z} \\ \bar{\Delta z}' \\ \bar{\Delta x} \\ \bar{\Delta x}' \\ \bar{\Delta \theta} \\ \bar{\Delta \theta}' \\ \bar{\Delta p}_1 \\ \bar{\Delta p}_2 \\ \bar{\Delta p}_3 \end{bmatrix}$$

In Kurzform: $\underline{y}_{s2} = \underline{C}_{s2} \cdot \underline{x}_{s2}$

2.1.3 Dritte Näherung ($\bar{\omega}_{svj}^2 \rightarrow \infty$, $\bar{\tau}_j \rightarrow 0$)

Mit $\bar{\omega}_{svj}^2 \rightarrow \infty$ und $\bar{\tau}_j \rightarrow 0$ bekommt man:

$$\Delta \bar{p}_1' = - \left(\frac{2 \cdot \zeta_{sv1}}{\bar{\omega}_{sv1}} \right)^{-1} \cdot \Delta \bar{p}_1 - \bar{Q}_{q1} \cdot \bar{\tau}_1 \cdot \Delta \bar{z}'' - \frac{\bar{Q}_{q1} \cdot \bar{\omega}_{sv1} \cdot \bar{\tau}_1}{2 \cdot \zeta_{sv1}} \cdot \Delta \bar{z}' + \bar{Q}_{q1} \cdot \bar{\tau}_1 \cdot l_1 \cdot \Delta \bar{\theta}''$$

$$+ \frac{\bar{Q}_{q1} \cdot \bar{\omega}_{sv1} \cdot \bar{\tau}_1}{2 \cdot \zeta_{sv1}} \cdot \Delta \bar{\theta}' + \bar{Q}_{p1} \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv1} \cdot \bar{\tau}_1}{2 \cdot \zeta_{sv1}} \cdot \bar{i}_1$$

$$\Delta \bar{p}_2' = - \left(\frac{2 \cdot \zeta_{sv2}}{\bar{\omega}_{sv2}} \right)^{-1} \cdot \Delta \bar{p}_2 - \bar{Q}_{q2}^* \cdot \Delta \bar{z}'' - \frac{\bar{Q}_{q2}^* \cdot \bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \zeta_{sv2}} \cdot \Delta \bar{z}' + \bar{Q}_{q2}^* \cdot l_2 \cdot \Delta \bar{\theta}''$$

$$+ \frac{\bar{Q}_{q2}^* \cdot \bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \zeta_{sv2}} \cdot \Delta \bar{\theta}' + \bar{Q}_{p2}^* \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv2}}{2 \cdot \zeta_{sv2}} \cdot \bar{i}_2$$

$$\Delta \bar{p}_3' = - \left(\frac{2 \cdot \zeta_{sv3}}{\bar{\omega}_{sv3}} \right)^{-1} \cdot \Delta \bar{p}_3 - \bar{Q}_{q3}^* \cdot \Delta \bar{x}'' - \frac{\bar{Q}_{q3}^* \cdot \bar{\omega}_{sv3}}{2 \cdot \zeta_{sv3}} \cdot \Delta \bar{x}' + \bar{Q}_{p3}^* \cdot \frac{\bar{\omega}_{sv3}}{2 \cdot \zeta_{sv3}} \cdot \bar{i}_3$$

In Kurzform: $\underline{x}' = \underline{G}_3 \cdot \underline{x} + \underline{F}_3 \cdot \underline{y}' + \underline{G}_{i3} \cdot \underline{i}$

mit $\underline{y}' = \underline{D} \cdot \underline{y} + \underline{R} \cdot \underline{x} + \underline{B}_v \cdot \underline{v}$ (Seite 32)

errechnet sich das Differentialgleichungssystem der dritten Näherung in der Form:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}' \\ \underline{x}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{R} \\ \underline{F}_3 \cdot \underline{D} & \underline{G}_3 + \underline{F}_3 \cdot \underline{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{G}_{i3} \end{bmatrix} \cdot \underline{i} + \begin{bmatrix} \underline{B}_v \\ \underline{F}_3 \cdot \underline{B}_v \end{bmatrix} \cdot \underline{v}$$

In Kurzform: $\underline{x}_{s3}' = \underline{A}_{s3} \cdot \underline{x}_{s3} + \underline{B}_{s3} \cdot \underline{i} + \underline{B}_{sv3} \cdot \underline{v}$

Darin sind:

$$\underline{A}_{s3} = \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{R} \\ \underline{F}_3 & \underline{G}_3 + \underline{F}_3 \cdot \underline{R} \end{bmatrix},$$

$$\underline{B}_{s3} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{G}_{i3} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B}_{sv3} = \begin{bmatrix} \underline{B}_v \\ \underline{F}_3 \cdot \underline{B}_v \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{s3}^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_3]$$

$$\underline{i}^T = [\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3]$$

$$\underline{v}^T = [\bar{F}_{Rz}, \bar{F}_{Rx}, \bar{M}_{Ry}]$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta z} \\ \bar{\Delta x} \\ \bar{\Delta \theta} \\ \bar{F}_{I1} \\ \bar{F}_{I2} \\ \bar{F}_{I3} \\ \bar{z}''_z \\ \bar{x}''_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k}_1 & \bar{d}_1 & 0 & 0 & -l_1 \cdot \bar{k}_1 & -l_1 \cdot \bar{d}_1 & -\bar{A}_1 & 0 \\ \bar{k}_2 & \bar{d}_2 & 0 & 0 & -l_2 \cdot \bar{k}_2 & -l_2 \cdot \bar{d}_2 & 0 & -\bar{A}_2 \\ 0 & 0 & \bar{k}_3 & \bar{d}_3 & 0 & 0 & 0 & -\bar{A}_3 \\ \frac{\delta}{1-M}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) & \frac{\delta}{1-M}(\bar{d}_1 + \bar{d}_2) & 0 & 0 & -\frac{\delta}{1-M}(l_1 \cdot \bar{k}_1 + l_2 \cdot \bar{k}_2) & -\frac{\delta}{1-M}(l_1 \cdot \bar{d}_1 + l_2 \cdot \bar{d}_2) & -\frac{\delta}{1-M} \cdot \bar{A}_1 & -\frac{\delta}{1-M} \cdot \bar{A}_2 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{1-M} \cdot \bar{k}_3 & \frac{\delta}{1-M} \cdot \bar{d}_3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta}{1-M} \cdot \bar{A}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta z} \\ \bar{\Delta x} \\ \bar{\Delta \theta} \\ \bar{\Delta p}_1 \\ \bar{\Delta p}_2 \\ \bar{\Delta p}_3 \end{bmatrix}$$

In Kurzform: $y_{s3} = \underline{c}_{s3} \cdot \underline{x}_{s3}$

Bemerkung: Die normierten Größen \bar{Q}_{qj} und \bar{Q}_{pj} beim Grenzübergang

$\bar{\tau}_j \rightarrow 0$ sind jetzt:

$$\bar{Q}_{qj}^* = \frac{\delta_1 \cdot \Omega \cdot Q_{qj} \cdot A_j}{\Delta p_{\max}} \quad \text{und} \quad \bar{Q}_{pj}^* = \frac{i_{\max} \cdot Q_{pj}}{\Delta p_{\max}}$$

2.1.4 Vierte Näherung ($\bar{\omega}_{svj} \rightarrow \infty, \bar{\tau}_j \rightarrow 0$)

Die Gleichungen für die Aktuatordynamik vereinfachen sich wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_1 \\ \Delta \bar{p}_2 \\ \Delta \bar{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{q}_{q1}^* & 0 & 0 & 0 & 1_1 \cdot \bar{q}_{q1}^* \\ 0 & -\bar{q}_{q2}^* & 0 & 0 & 0 & 1_2 \cdot \bar{q}_{q2}^* \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{q}_{q3}^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{z} \\ \Delta \bar{z}' \\ \Delta \bar{x} \\ \Delta \bar{x}' \\ \Delta \bar{\theta} \\ \Delta \bar{\theta}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{q}_{p1}^* & 0 & 0 \\ 0 & \bar{q}_{p2}^* & 0 \\ 0 & 0 & \bar{q}_{p3}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_3 \end{bmatrix}$$

In Kurzform: $\underline{w} = \underline{F}_{i4} \cdot \underline{y} + \underline{G}_{i4} \cdot \bar{\underline{i}}$

mit $\underline{y}' = \underline{D} \cdot \underline{y} + \underline{R} \cdot \underline{w} + \underline{B}_v \cdot \underline{v}$

errechnet sich das Differentialgleichungssystem der vierten Näherung wie folgt:

$$\underline{y}' = (\underline{D} + \underline{R} \cdot \underline{F}_{i4}) \cdot \underline{y} + (\underline{R} \cdot \underline{G}_{i4}) \cdot \bar{\underline{i}} + \underline{B}_v \cdot \underline{v}$$

d.h. $\underline{x}_{s4} = \underline{y}$

mit $\underline{A}_{s4} = \underline{D} + \underline{R} \cdot \underline{F}_{i4}$

$$\underline{B}_{s4} = \underline{R} \cdot \underline{G}_{i4}$$

wird $\underline{x}_{s4}' = \underline{A}_{s4} \cdot \underline{x}_{s4} + \underline{B}_{s4} \cdot \bar{\underline{i}} + \underline{B}_v \cdot \underline{v}$

Ausgangsgrößen:

$$\begin{aligned}
 \text{mit } \bar{F}_{I1} &= \bar{k}_1 \cdot \Delta \bar{z} + \bar{d}_1 \cdot \Delta \bar{z}' - l_1 \cdot \bar{k}_1 \cdot \Delta \bar{\theta} - l_1 \cdot \bar{d}_1 \cdot \Delta \bar{\theta}' - \bar{A}_1 \cdot \Delta \bar{p}_1 \\
 &= \bar{k}_1 \cdot \Delta \bar{z} + \bar{d}_1 \cdot \Delta \bar{z}' - l_1 \cdot \bar{k}_1 \cdot \Delta \bar{\theta} - l_1 \cdot \bar{d}_1 \cdot \Delta \bar{\theta}' - \\
 &\quad \bar{A}_1 \cdot (\bar{Q}_{P1}^* \cdot \bar{i}_1 - \bar{Q}_{Q1}^* \cdot \Delta \bar{z}' + l_1 \cdot \bar{Q}_{Q1}^* \cdot \Delta \bar{\theta}')
 \end{aligned}$$

bekommt man:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta z} \\ \bar{\Delta x} \\ \bar{\Delta \theta} \\ \bar{F}_{I1} \\ \bar{F}_{I2} \\ \bar{F}_{I3} \\ \bar{z}_z'' \\ \bar{x}_z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k}_1 & \bar{d}_1 + \bar{Q}_{q1}^* \cdot \bar{A}_1 & 0 & 0 & -l_1(\bar{d}_1 + \bar{Q}_{q1}^* \cdot \bar{A}_1) & 0 \\ \bar{k}_2 & \bar{d}_2 + \bar{Q}_{q2}^* \cdot \bar{A}_2 & 0 & 0 & -l_2(\bar{d}_2 + \bar{Q}_{q2}^* \cdot \bar{A}_2) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_3 & \bar{d}_3 + \bar{Q}_{q3}^* \cdot \bar{A}_3 & 0 & -\bar{Q}_{p3}^* \cdot \bar{A}_3 \\ \frac{\delta}{1-M}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) & \frac{\delta}{1-M}(\bar{d}_1 + \bar{Q}_{q1}^* \cdot \bar{A}_1 + \bar{d}_2 + \bar{Q}_{q2}^* \cdot \bar{A}_2) & 0 & 0 & -\frac{\delta}{1-M}(\bar{d}_1 + \bar{Q}_{q1}^* \cdot \bar{A}_1 + \bar{d}_2 + \bar{Q}_{q2}^* \cdot \bar{A}_2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{1-M} \bar{k}_3 & \frac{\delta}{1-M}(\bar{d}_3 + \bar{Q}_{q3}^* \cdot \bar{A}_3) & 0 & -\frac{\delta}{1-M} \bar{Q}_{p3}^* \cdot \bar{A}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta z} \\ \bar{\Delta x} \\ \bar{\Delta \theta} \\ \bar{\Delta x} \\ \bar{\Delta \theta} \\ \bar{\Delta \theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{Q}_{p1}^* \cdot \bar{A}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{Q}_{p2}^* \cdot \bar{A}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{Q}_{p3}^* \cdot \bar{A}_3 \\ -\frac{\delta}{1-M} \bar{Q}_{p1}^* \cdot \bar{A}_1 & -\frac{\delta}{1-M} \bar{Q}_{p2}^* \cdot \bar{A}_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta}{1-M} \bar{Q}_{p3}^* \cdot \bar{A}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix}$$

In Kurzform: $\bar{Y}_{S4} = \bar{C}_{S4} \bar{X}_{S4} + \bar{D}_{S4} \cdot \bar{I}$

2.2 Aufstellen des vollständigen Gleichungssystem für das dreiachsige Funktionsmodell bei starrer Zellenmodellierung.

(zweite Form mit $x_s^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3, \bar{\epsilon}_1', \bar{\epsilon}_2', \bar{\epsilon}_3', \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_3]$)

Bei der Elimination der Servoventilauslenkung ϵ_j in den Kraftgleichungen wurde das vollständige Gleichungssystem (Abschnitt 2.1, erste Form) errechnet. Es müssen sechs verschiedene Störungen $\bar{F}_{Rz}, \bar{F}'_{Rz}, \bar{F}_{Rx}, \bar{F}'_{Rx}, \bar{M}_{Ry}$ und \bar{M}'_{Ry} berücksichtigt werden.

Beläßt man die Servoventilauslenkung ϵ_j in den Kraftgleichungen, so können die Hydraulikgleichungen in eine Form gebracht werden, in der die Wirkung der Steuerströme i_j auf die Servoventilauslenkungen ϵ_j bzw. von ϵ_j auf die Durchflüsse q_j getrennt deutlich wird.

Die Hydraulikgleichungen lauten in Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_1 \\ \Delta \bar{p}_2 \\ \Delta \bar{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_1 \\ \Delta \bar{p}_2 \\ \Delta \bar{p}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_1^* \cdot \bar{k}_{\epsilon 1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_2^* \cdot \bar{k}_{\epsilon 2} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_3^* \cdot \bar{k}_{\epsilon 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_1 \\ \bar{\epsilon}_2 \\ \bar{\epsilon}_3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\bar{k}_1^* \cdot \bar{A}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{k}_1^* \cdot \bar{A}_1 \cdot 1_1 \\ 0 & -\bar{k}_2^* \cdot \bar{A}_2 & 0 & 0 & 0 & \bar{k}_2^* \cdot \bar{A}_2 \cdot 1_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{k}_3^* \cdot \bar{A}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{z} \\ \Delta \bar{z}' \\ \Delta \bar{x} \\ \Delta \bar{x}' \\ \Delta \bar{\theta} \\ \Delta \bar{\theta}' \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_1 \\ \bar{\epsilon}_2 \\ \bar{\epsilon}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot \zeta_{sv_1} \cdot \bar{\omega}_{sv_1} & 0 & 0 \\ 0 & -2 \cdot \zeta_{sv_2} \cdot \bar{\omega}_{sv_2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \cdot \zeta_{sv_3} \cdot \bar{\omega}_{sv_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_1 \\ \bar{\epsilon}_2 \\ \bar{\epsilon}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{\omega}_{sv_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\omega}_{sv_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\omega}_{sv_3}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_1 \\ \bar{\epsilon}_2 \\ \bar{\epsilon}_3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_{sv_1}^2 \cdot \bar{k}_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\omega}_{sv_2}^2 \cdot \bar{k}_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega}_{sv_3}^2 \cdot \bar{k}_{i3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_3 \end{bmatrix}$$

In Kurzform: $\underline{w}' = \underline{G} \cdot \underline{w} + \underline{G}_\epsilon \cdot \bar{\underline{\epsilon}} + \underline{F} \cdot \underline{y}$

$$\bar{\underline{\epsilon}}'' = \underline{W}_\epsilon \cdot \bar{\underline{\epsilon}}' + \underline{W}_\epsilon \cdot \bar{\underline{\epsilon}} + \underline{G}_i \cdot \underline{i}$$

mit $\underline{y}' = \underline{D} \cdot \underline{y} + \underline{R} \cdot \underline{w} + \underline{B}_v \cdot \underline{v}$ und $\underline{x}_s = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \bar{\underline{\epsilon}} \\ \bar{\underline{\epsilon}}' \\ \underline{w} \end{bmatrix}$

bekommt man:

$$\begin{bmatrix} \underline{y} \\ \bar{\underline{\epsilon}} \\ \bar{\underline{\epsilon}}' \\ \underline{w} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{R} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{E} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{W}_\epsilon & \underline{W}_\epsilon & \underline{0} \\ \underline{F} & \underline{G}_\epsilon & \underline{0} & \underline{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \bar{\underline{\epsilon}} \\ \bar{\underline{\epsilon}}' \\ \underline{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{G}_i \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{i} + \begin{bmatrix} \underline{B}_v \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{v}$$

In Kurzform:

$$\underline{x}_s' = \underline{A}_s \cdot \underline{x}_s + \underline{B}_s \cdot \underline{i} + \underline{B}_{vs} \cdot \underline{v}$$

Ausgangsgrößen:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta z} \\ \bar{\Delta x} \\ \bar{\Delta \theta} \\ \bar{F}_{I1} \\ \bar{F}_{I2} \\ \bar{F}_{I3} \\ \bar{z}''_z \\ \bar{x}''_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k}_1 & \bar{d}_1 & 0 & -l_1 \cdot \bar{k}_1 & -l_1 \cdot \bar{d}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k}_2 & \bar{d}_2 & 0 & -l_2 \cdot \bar{k}_2 & -l_2 \cdot \bar{d}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_3 & 0 & 0 & \bar{d}_3 & 0 & -\bar{A}_3 \\ \frac{\delta}{1-M}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) & \frac{\delta}{1-M}(\bar{d}_1 + \bar{d}_2) & 0 & -\frac{\delta}{1-M}(l_1 \cdot \bar{k}_1 + l_2 \cdot \bar{k}_2) & -\frac{\delta}{1-M}(l_1 \cdot \bar{d}_1 + l_2 \cdot \bar{d}_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{1-M} \bar{k}_3 & \frac{\delta}{1-M} \bar{d}_3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta}{1-M} \bar{A}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta z} \\ \bar{\Delta z}' \\ \bar{\Delta x} \\ \bar{\Delta x}' \\ \bar{\Delta \theta} \\ \bar{\Delta \theta}' \\ \bar{\epsilon}_1 \\ \bar{\epsilon}_2 \\ \bar{\epsilon}_3 \\ \bar{\epsilon}_1' \\ \bar{\epsilon}_2' \\ \bar{\epsilon}_3' \\ \bar{\Delta p}_1 \\ \bar{\Delta p}_2 \\ \bar{\Delta p}_3 \end{bmatrix}$$

In Kurzform: $y_s = C_s \cdot x_s$

2.2.1 Erste Näherung ($\bar{\tau}_j \rightarrow 0$)

$$\mathbf{x}_{s1}^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3, \bar{\varepsilon}_1', \bar{\varepsilon}_2', \bar{\varepsilon}_3']$$

Nach Multiplikation der Hydraulikgleichungen 2.2.1 mit $\bar{\tau}_j$ und Bildung des Grenzübergangs $\bar{\tau}_j \rightarrow 0$.

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_1 \\ \Delta \bar{p}_2 \\ \Delta \bar{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 \cdot M}{\delta \cdot A_1} \bar{k}_{\varepsilon 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 \cdot M}{\delta \cdot A_2} \bar{k}_{\varepsilon 2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_3 \cdot M}{\delta \cdot A_3} \bar{k}_{\varepsilon 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\gamma_1 \cdot M}{\delta \cdot A_2} \bar{Q}_{q1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_1 \cdot M}{\delta \cdot A_1} \cdot 1_1 \cdot \bar{Q}_{q1} \\ 0 & -\frac{\gamma_2 \cdot M}{\delta \cdot A_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_2 \cdot M}{\delta \cdot A_2} \cdot 1_2 \cdot \bar{Q}_{q2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_3 \cdot M}{\delta \cdot A_3} \bar{Q}_{q3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{z} \\ \Delta \bar{z}' \\ \Delta \bar{x} \\ \Delta \bar{x}' \\ \Delta \bar{\theta} \\ \Delta \bar{\theta}' \end{bmatrix}$$

In Kurzform: $\underline{w} = \underline{G}_{\varepsilon 1} \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{F}_1 \cdot \underline{y}$

mit $\underline{\varepsilon}'' = \underline{W}_{\varepsilon 1} \cdot \underline{\varepsilon}' + \underline{w}_{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} + \underline{G}_1 \cdot \underline{i}$ und

$$\underline{y}' = \underline{D} \cdot \underline{y} + \underline{R} \cdot \underline{w} + \underline{B}_v \cdot \underline{y}$$

bekommt man:

$$\begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{\bar{\varepsilon}} \\ \underline{\bar{\varepsilon}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D+R \cdot F_1} & \underline{R \cdot G_{\varepsilon 1}} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{E} \\ \underline{0} & \underline{W_{\varepsilon}} & \underline{W_{\varepsilon}'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{\bar{\varepsilon}} \\ \underline{\bar{\varepsilon}}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{G_1} \end{bmatrix} \cdot \underline{\bar{i}} + \begin{bmatrix} \underline{B_v} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{v}$$

In Kurzform: $\underline{x}_{s1}' = \underline{A}_{s1} \cdot \underline{x}_{s1} + \underline{B}_{v1} \cdot \underline{\bar{i}} + \underline{B}_{vs1} \cdot \underline{v}$

Ausgangsgrößen:

[illegible]

In Kurzform: $y_{g1} = c_{g1} \cdot x_{g1}$

3. Aufstellung der Systemgleichungen für das dreiachsige Funktionsmodell bei elastischer Zellenmodellierung.

Bei der Aufstellung der Systemgleichungen (bei elastischer Zellenmodellierung) mit der "Modal-Methode" sind folgende allgemeingültige Voraussetzungen und Annahmen gemacht worden:

- Das elastomechanische Modell der Hubschrauberzelle hat die starren Freiheitsgrade Δz , Δx , $\Delta \theta$ (relative Lagekoordinaten gegenüber der starren Rotor-Getriebe-Einheit).
- Die Deformation der Zellenstruktur ist durch eine endliche Summe von Eigenschwingungsformen wie folgt beschrieben:

$$\underline{u} = \phi_1 \cdot q_1 + \phi_2 \cdot q_2 + \dots + \phi_n \cdot q_n = \underline{\phi} \cdot \underline{q}$$

- Die Bewegungsgleichungen lassen sich aufgrund struktureller Linearität und viskoser Dämpfung in der allgemeinen Darstellung

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{q}} + \underline{D} \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{K} \cdot \underline{q} = \underline{Q} \text{ anschreiben.}$$

- Da nicht alle Eigenformen zur Transformation auf generalisierte Koordinaten herangezogen werden (d.h. es werden nur die ersten (n) Eigenvektoren in der Modalmatrix berücksichtigt), sei der "Energieverlust" gegenüber dem ursprünglichen Koordinatensystem klein gehalten, daß die Energieverteilung im Erregungs-Spektrum im Bereich der ersten (n) Eigenformen konzentriert ist. (Genügend viele (n) Eigenformen werden berücksichtigt).
- Die Strukturdämpfung wird als "modal" angenommen, d.h. die Nebendiagonalglieder in der generalisierten Dämpfungsmatrix \underline{D} werden vernachlässigt.
- Die "Modal Dämpfung" ist wie folgt definiert:

$$\underline{D}_{rs} = \begin{cases} \neq 0, & \text{für } r = s \\ = 0, & \text{für } r \neq s \end{cases}$$

- Der Aufbau der komplexen, mechanischen Impedanz-Matrix erfolgt aus den generalisierten Massen, den generalisierten Aktuatorenkräften, der Diagonal-Matrix, der Eigenfrequenzquadrate und den Zellenstrukturdämpfungskräften als Funktion von n_s diskreten, physikalischen Kreisfrequenzen ω_r , wobei die gemischt reell und komplex auftretenden Matrizen nach Real- und Imaginärteil geordnet sind.
- Bei der Wahl der schrittweise zwischen den ω_r -Werten wurde in der Umgebung von $\omega_r = \omega_e$ die Teilung dichter gewählt damit die scharfen Resonanzspitzen bei kleinen Dämpfungen nicht verwischt werden.

3.1 Zellenmodellierung

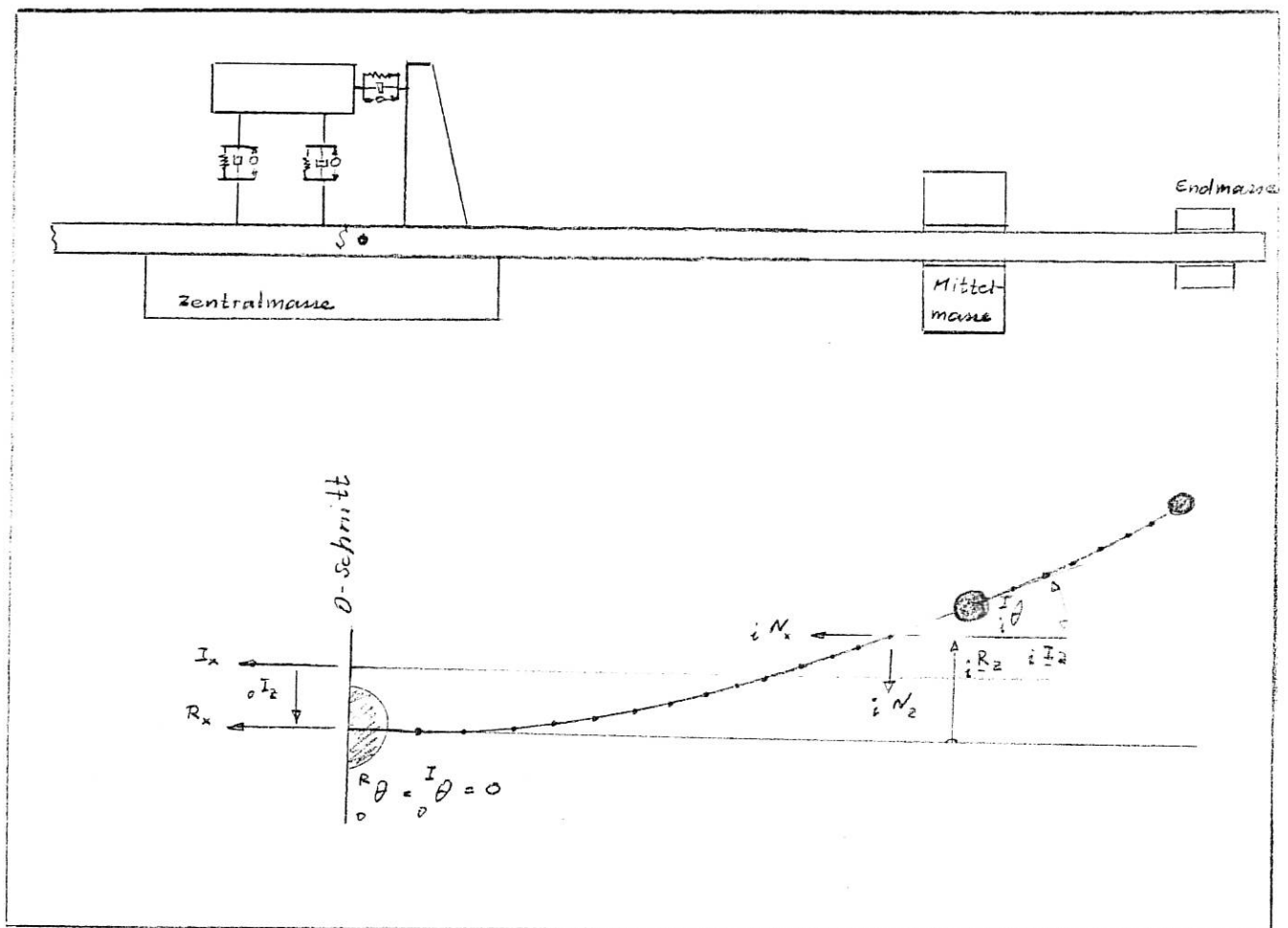


Bild 3.1: Rechenmodell für das dreiachsige Funktionsmodell (elastische Zellenmodellierung)

Die Abbildung des elastomechanischen Modells aus der realen Hubschrauberzellenstruktur wurde anhand eines Balkenmodells mit konzentrierten Einzelmassen (Bild 3.1) durchgeführt.

Letzteres hat keinen Einfluß auf die allgemeine Gültigkeit des Konzeptes.

Die dabei gemachten, vereinfachenden Annahmen sind:

- Die Steifigkeitsverteilung kann mit einem Balkenmodell ausreichend genau angenähert werden.
- Die Massen- (Trägheits-) Eigenschaften können an diskreten Balkenschnitten konzentriert werden (lumped-mass-konzept).

Um die allgemeine Gültigkeit des Rechenverfahrens beizubehalten, wird zuerst die Steifigkeitsmatrix (bzw. Nachgiebigkeitsmatrix) als bekannt vorausgesetzt. Sie kann z.B. unter Verwendung von Finite-Element-Methoden berechnet werden.

Das Gleichgewicht aus Trägheits- und elastischen Kräften bei Abwesenheit von Dämpfung und systemunabhängiger, äußerer Erregung ergibt folgendes System von homogenen Bewegungsgleichungen:

$$\underline{m}_0 \cdot \frac{I}{\sigma} \ddot{\underline{u}} + \frac{R}{\sigma} \underline{K} \cdot \frac{R}{\sigma} \underline{u} = \underline{0} \quad (1)$$

Das freie Feder-Massen-System führt keine Starrkörperbewegung aus, wenn seine Eigenschwingungen so verlaufen, daß sich zu jedem Zeitpunkt die Trägheitskräfte in allen Freiheitsgraden im Gleichgewicht befinden, d.h. es muß für freie Systeme die folgende Gleichgewichtsbedingung erfüllt sein:

$$\frac{R}{\sigma}^T \cdot \underline{m}_0 \cdot \frac{I}{\sigma} \underline{u} = \underline{0} \quad (2)$$

Dabei ist das Koordinatensystem der neuen Gleichgewichtslage (Inertial-System, Hochindex I) mit dem Referenzsystem (Hochindex R) um den Vektor $\frac{I}{s} \underline{u}$ verschoben, wobei die auf das R-System bezogenen Freiheitsgrade von diesem abhängig sind.

Die Verknüpfung der Freiheitsgrade in beiden Bezugssystemen wird durch die Transformation $\frac{I}{s} \underline{u} = \frac{R}{s} \underline{u} + \underline{R} \cdot \frac{I}{s} \underline{u}$ beschrieben.

Zur Ableitung der Transformations-Matrizen (R-System \rightarrow I-System) ist eine Kennzeichnung der benutzten Matrizen und Vektoren erforderlich, je nach

dem ob in Ihnen die Freiheitsgrade des Basis-Schnittes (0-Schnittes) enthalten sind oder nicht.

Index "0" = Freiheitsgrade des 0-Schnittes sind enthalten

Index "1" = Freiheitsgrade des 0-Schnittes sind nicht enthalten

Die Bewegungsgleichungen für das Teilsystem (Index "1") lautet:

$$\underline{m}_1 \cdot \underline{\ddot{u}}_1 + \underline{R}_K \cdot (\underline{\dot{u}}_1 - \underline{R} \cdot \underline{\dot{u}}_s) = \underline{0} \quad (3)$$

Mit der Gleichgewichtsbedingung (2) und der Transformation $\underline{\dot{u}}_u = \underline{R}_u + \underline{R} \cdot \underline{\dot{u}}_s$ kann man den unbekannten Verschiebungsvektor $\underline{\dot{u}}_s$ eliminieren indem man ihn durch bekannte Größen ausdrückt:

$$\underline{\dot{u}}_s = - \underline{M}^{-1} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{m}_1 \cdot \underline{\dot{u}}_1 \quad (4)$$

bzw.

$$\underline{\dot{u}}_s = - \underline{M}^{-1} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{m}_1 \cdot \underline{R}_C \cdot \underline{m}_1 \cdot \underline{\dot{u}}_1$$

Erläuterungen: In der allgemeinen Darstellung nach dem Lumped-mass-Konzept, wird die kontinuierliche verteilte Masse der Zellenstruktur durch ein System von (r) Einzelmassen m_i , die jeweils sechs-Freiheitsgrade relativ zum Referenzkoordinaten System besitzen, nachgebildet.

Jede Masse m_i wird demzufolge durch eine Matrix \underline{i}_M dargestellt, die eine Untermatrix zur Matrix des Gesamtsystems bildet.

$$\underline{i}_M = \begin{bmatrix} m_i & & & & & \\ & m_i & & & & \\ & & m_i & & & \\ & & & I_{xi} & I_{xyi} & I_{zi} \\ & & & -I_{xyi} & I_{yi} & -I_{yzi} \\ & & & -I_{xzi} & I_{xyi} & I_{zi} \end{bmatrix} \quad (\text{Massenmatrix } \underline{i}_M)$$

$${}^i_R = \begin{bmatrix} 1 & & & & z_i & -y_i \\ & 1 & & & -z_i & x_i \\ & & 1 & & y_i & -x_i \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(Transformation Matrix } {}^i_R \text{ der Translation)}$$

Da der Schwerpunkt und der Bezugspunkt für die Verschiebungen eines jeden Elements üblicherweise nicht zusammenfallen, muß die Matrix i_M transformiert werden um die eigentliche Massenmatrix *_M zu erhalten

$${}^*_M = {}^i_R{}^T \cdot {}^i_M \cdot {}^i_R$$

worin i_R die Transformationsmatrix darstellt, welche die Beziehung zwischen Bezugspunkt und Schwerpunkt des Elementes m_i enthält.

$${}^*_M = \begin{bmatrix} {}^*_1M & & \\ & {}^*_2M & \\ & & \ddots \\ & & & {}^*_rM \end{bmatrix}$$

$${}^T_R = \begin{bmatrix} {}^1_R & & \\ & {}^2_R & \\ & & \ddots \\ & & & {}^i_R \\ & & & & {}^r_R \end{bmatrix}$$

\underline{s}_M und \underline{T}_R sind die Massen- und translatorischen Transformationsmatrizen des Systems.

Schließlich ist mit \underline{R}_R = Rotatorische Transformation

$$\underline{R}_R = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & v_R & & & \\ & & 2v_R & & \\ & & & i v_R & \\ & & & & r v_R \end{bmatrix}$$

die Drehung und Verschiebung der lokalen Koordinatensysteme beschrieben.

$$\underline{v}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & \cos v & \sin v & & \\ 0 & -\sin v & \cos v & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \cos v & \sin v \\ & & & 0 & -\sin v & \cos v \end{bmatrix}$$

Die Gesamttransformationsmatrix ist

$$\underline{R} = \underline{T}_R \cdot \underline{R}_R$$

Die transformierten Bewegungsgleichungen der freien Zelle lauten:

$$\underline{m}_1 \cdot \underline{\ddot{u}}_1 + \underline{K}_1 \cdot (\underline{E} + \underline{R}_1 \underline{s}_M^{-1} \underline{R}_1^T \cdot \underline{m}_1) \cdot \underline{u}_1 = \underline{0}$$

Darin sind:

$$\underline{{}_1K} = \underline{{}_1R}^T \cdot \underline{{}_1K}^R \cdot \underline{{}_1R}$$

$$\underline{{}_0M} = \underline{{}_0R}^T \cdot \underline{{}_0M}^R \cdot \underline{{}_0R}$$

$$\underline{{}_1M} = \underline{{}_1R}^T \cdot \underline{{}_1M}^R \cdot \underline{{}_1R}$$

Mit der Definition $\underline{{}_1K} = \underline{{}_1K}^R \cdot (\underline{E} + \underline{{}_1R} \cdot \underline{{}_sM}^{-1} \cdot \underline{{}_1R}^T \cdot \underline{{}_1M})$ folgt:

$$\underline{{}_1M} \cdot \underline{{}_1\ddot{u}} + \underline{{}_1K} \cdot \underline{{}_1u} = \underline{0}$$

Mit einem harmonischen Schwingungsansatz der Form:

$$\underline{{}_1u} = \underline{{}_1\phi} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{{}_1\ddot{u}} = -\omega^2 \cdot \underline{{}_1\phi} \cdot e^{j\omega t}$$

Der reelle Vektor $\underline{{}_1\phi}$ enthält die maximalen Amplituden der Auslenkungen an den Massenpunkten in allen dort betrachteten Freiheitsgraden.

Für die weitere Rechnung wird vorausgesetzt, daß die Zellenelastizität als Steifigkeitsmatrix vorliegt.

Durch Einsetzen und mit $\lambda=1/\omega^2$ erhält man das allgemeine Eigenwertproblem:

$$(\underline{{}_1M} - \lambda \cdot \underline{{}_1K}) \cdot \underline{{}_1\phi} = \underline{0}$$

Entsprechend der "n" Freiheitsgrade besitzt das Eigenwertproblem "n" Eigenwerte λ_i ($i=1 \dots n$) und "n" Eigenvektoren $\underline{{}_1\phi_i}$ ($i=1 \dots n$).

Mit der Einführung der Modal-Matrix \underline{I}_1^{ϕ} und der Diagonalmatrix $\underline{\omega}_e^2$ der Eigenfrequenzquadrate $\omega_{ei}^2 = \frac{1}{\lambda_i}$ ergibt sich die Identität:

$$\underline{m}_1 \cdot \underline{I}_1^{\phi} \cdot \underline{\omega}_e^2 = \underline{I}_1^K \cdot \underline{I}_1^{\phi}$$

Durch Erweiterung der Modal-Matrix \underline{I}_1^{ϕ} um die Verschiebung und Drehung des R-Punktes ergibt sich das Gleichungssystem:

$$-\omega^2 \cdot \underline{m}_0 \cdot \underline{I}_0^{\phi} + \underline{R}_K \cdot \underline{R}_\phi = \underline{0}$$

Und durch Einsetzung die neue Identität:

$$\underline{m}_0 \cdot \underline{I}_0^{\phi} \cdot \underline{\omega}_e^2 = \underline{R}_K \cdot \underline{R}_\phi$$

mit $\underline{R}_\phi = \underline{I}_\phi - \underline{R}_0 \cdot \underline{I}_s^{\phi}$

$$\underline{R}_\phi = \underline{I}_\phi - \underline{R}_0 \cdot \underline{I}_s^{\phi}$$

$$\underline{I}_s^{\phi} = -\underline{s}^M{}^{-1} \cdot \underline{R}_1^T \cdot \underline{m}_1 \cdot \underline{I}_1^{\phi}$$

Da die Eigenvektoren nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, können sie normiert und damit in der Maximum-Norm dargestellt werden:

$$\left[\begin{array}{c} \underline{I}_\phi \\ \underline{0}_i \end{array} \right] = \max_j \left(\left[\begin{array}{c} \underline{I}_\phi \\ \underline{0}_j \end{array} \right] \right)_i \quad \begin{array}{l} j = 1 \dots m+1 \\ i = 1 \dots n \end{array}$$

Zusammenfassung der verwendeten Matrizen:

- Erweiterte Modal-Matrix: $\underline{R}^\Phi = \left[\begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{I} \\ \hline \underline{R} & \underline{0} \end{array} \right]$

- Generalisierte Massenmatrix: $\underline{M} = \underline{R}^{\Phi T} \cdot \underline{m}_0 \cdot \underline{R}^\Phi$

- Modalisierte Massenmatrix: $\underline{M}^P = \underline{m}_0 \cdot \underline{R}^\Phi$

- Erweiterte Eigenfrequenzmatrix: $\underline{R}^\Omega =$

$\underline{0}$	$\underline{0}$
$\underline{0}$	ω_e^2

3.2 Koordinatensystem zur Ableitung der Bewegungsgleichungen:

- $(R_x - R_y - R_z)$ = Referenzkoordinatensystem (Hochindex R) der am 0-Schnitt eingespannten Zelle.
- $(I_x - I_y - I_z)$ = Inertial-Koordinatensystem der freien Zelle.
- $(x_R - y_R - z_R)$ = Festes Koordinatensystem in dem die Bewegung der Zelle unter der Einwirkung der Aktuatorenkräfte gemessen wird.
- $(N_x - N_y - N_z)$ = Örtliche Koordinatensysteme an den Trägheits-Referenzpunkten ($i = 0 \dots N$) in dem die Trägheitseigenschaften des Massenschnittes gemessen werden.

3.3 Zellenidealisierung (Balken-Einzelmassen-System)

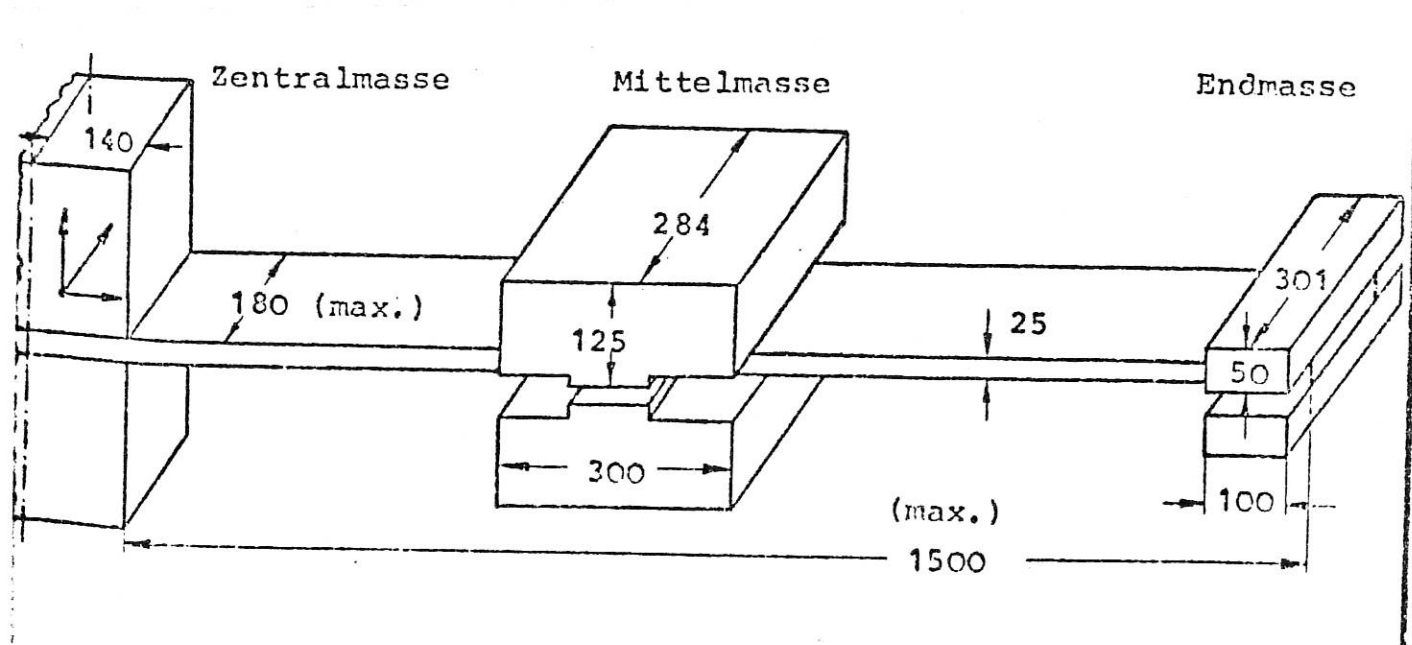


Bild 3.3: Zellenidealisierung

Nachgiebigkeitsmatrizen:

$I_C =$

$\underline{0}$	$\underline{0}$	
$\underline{0}$	$I_{C_{zz}}$	$I_{C_{z\theta}}$
	$I_{C_{\theta z}}$	$I_{C_{\theta\theta}}$

$(n+1) \times (n+1)$

$I_{C_{z\theta}} = I_{C_{\theta z}}$

$\xleftrightarrow{\quad I_{C_1} \quad}$

Modalmatrizen:

$I_\phi =$

	$I_{s\phi}$	
$I_{\phi_{1,1}}$	$I_{\phi_{1,k}}$	$I_{\phi_{1,L}}$

$(n+1) \times 1$

I_{ϕ_1}

\updownarrow

Aufbau der verwendeten Matrizen:

Massenmatrizen: $\underline{m}_0, \underline{m}_1, \underline{m}_s$

$$\underline{m}_s = \frac{1}{2} \underline{m}_0$$

$\underline{m}_0 =$

\underline{m}_s	$\underline{0}$	
$\underline{0}$	m_i	s_{xi}
	s_{xi}	I_{yyi}

$\xleftrightarrow{\quad 1 \quad \underline{m} \quad 1 \quad}$

$$i = 1 \dots N$$

$$n = 2 \cdot N$$

$$(n+1) \times (n+1)$$

Steifigkeitsmatrizen:

$\underline{I}_{0K} =$

\underline{I}_{sK}	$\underline{I}_{s,1K}$	
$\underline{I}_{1,sK}$	$\underline{I}_{K_{zz}}$	$\underline{I}_{K_{z\theta}}$
	$\underline{I}_{K_{\theta z}}$	$\underline{I}_{K_{\theta\theta}}$

$\xleftrightarrow{\quad \underline{I}_{1K} \quad}$

$$(n+1) \times (n+1)$$

$$\underline{I}_{K_{\theta z}} = \underline{I}_{K_{z\theta}}$$

$$\begin{matrix} \underline{R} \\ \underline{0} \end{matrix} \underline{\Phi} = \begin{matrix} \underline{0} \\ \underline{R} \\ 1 \end{matrix} \underline{\Phi}$$

(n+1) x 1

Transformationsmatrizen:

$$\underline{R}^T = \begin{bmatrix} \underline{s}^T & \underline{0} \end{bmatrix}$$

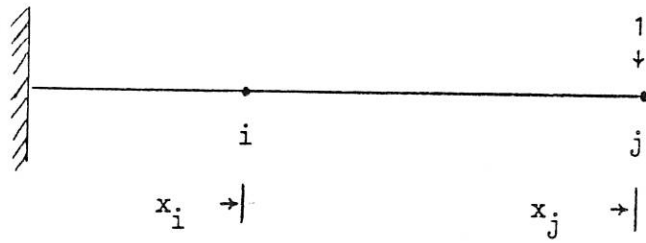
(n+1) x 1

Matrix der Eigenfrequenzen:

$$\underline{\omega}^2 = \begin{matrix} \omega_{e_1}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{e_1}^2 \end{matrix}$$

1 x 1

Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitselemente:



$$c_{ij} = \frac{x_i^2}{6 EJ} \cdot (3x_j - x_i)$$

$$k_{ij} = c_{ij}^{-1}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} l^3/3EJ & l^2/2EJ \\ l^2/2EJ & l/EJ \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ -6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{bmatrix}$$

Auslenkungsvektoren:

$$\underline{I}_{\underline{O}u} = \begin{bmatrix} I_{z_o} \\ I_{i^z} \\ I_{i^\theta} \end{bmatrix} \quad n+1$$

$$\underline{R}_{\underline{O}u} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ R_{i^z} \\ R_{i^\theta} \end{bmatrix} \quad n+1$$

$$\underline{I}_{s\underline{u}} = I_{z_o}$$

$$\underline{I}_{s\underline{\phi}} = - \underline{sM}^{-1} \cdot \underline{1R}^T \cdot \underline{1m} \cdot \underline{I}_{\underline{1}\phi}$$

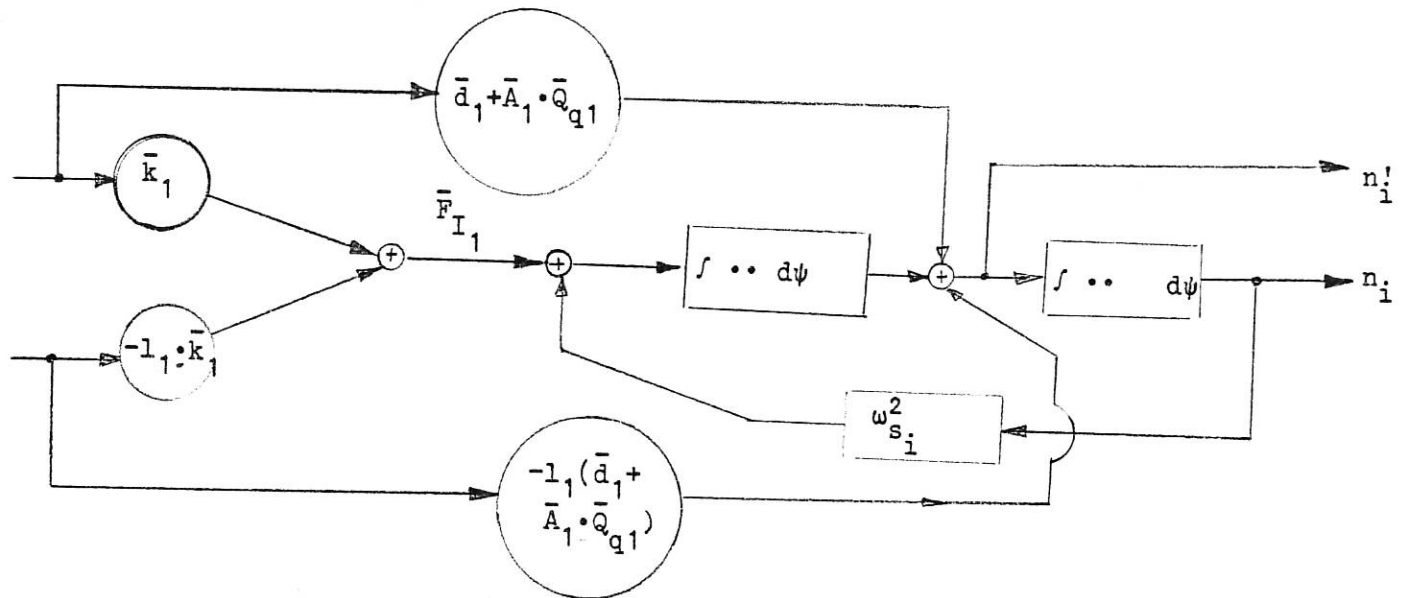
$$\underline{R}_{\underline{O}\phi} = \underline{I}_{\underline{O}\phi} - \underline{OR} \cdot \underline{I}_{s\underline{\phi}}$$

4. Aufstellen der Systemgleichungen für das geschlossene Modell

Durch die Notch-Elemente in der Vibrationsrückführung werden die Störfrequenzen bei 4Ω und 8Ω kompensiert (4Ω und 8Ω Notch-Filter).

Durch Integratoren in der Trimmrückführung wird die Relativauslenkung im eingeschwungenen Zustand auf Null gebracht (0Ω Notch-Filter).

- Reglerelemente bei Messung von $\Delta \bar{z}$ und $\Delta \bar{\theta}$.



$$\begin{bmatrix} n_{01} \\ n_{41} \\ n'_{41} \\ n_{81} \\ n'_{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 s_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 s_{81} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{01} \\ n_{41} \\ n'_{41} \\ n_{81} \\ n'_{81} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \bar{d}_1 + \bar{A}_1 \bar{Q}_{q1} & -1_1 (\bar{d}_1 + \bar{A}_1 \bar{Q}_{q1}) \\ k_1 & -1_1 \cdot \bar{k}_1 \\ \bar{d}_1 + \bar{A}_1 \bar{Q}_{q1} & -1_1 (\bar{d}_1 + \bar{A}_1 \bar{Q}_{q1}) \\ k_1 & -1_1 \cdot k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{z} \\ \Delta \bar{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{Q}_{q1} \bar{A}_1 \\ 0 \\ -\bar{Q}_{q1} \bar{A}_1 \end{bmatrix} \cdot \bar{i}_1$$

Bei allen Reglerentwürfen wurde ein Regler benutzt, der ein quadratisches Gütekriterium der Form

$$J = \int_0^{\infty} (\underline{x}^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \cdot \underline{u}) d\psi$$

minimiert.

Das Optimale Reglergesetz hat die Form

$$\underline{u} = \underline{K} \cdot \underline{x}$$

wobei $\underline{K} = - \underline{R}^{-1} \underline{b}^T \cdot \underline{P}$

mit \underline{P} die positive definitive Lösung der algebraischen Riccatigleichung (Riccati-Regler).

Die Wichtungsmatrizen \underline{Q} und \underline{R} wurden derart bestimmt, daß in der resultierenden Rückführmatrix \underline{K} die Verstärkungen k_{ij} der nicht gemessenen Zustände \underline{x}_i (ohne Stabilitätsverlust des Gesamtsystems) zu Null gemacht werden können.

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \begin{matrix} x \\ \vdots \\ x \end{matrix} \end{bmatrix}; \underline{R} = \begin{bmatrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{bmatrix} \hat{=} \begin{matrix} F_{I_1} \\ F_{I_2} \\ F_{I_3} \end{matrix}$$

4.1 Rechenmodelldaten

$$m = 1570 \text{ kg}$$

$$m_z = 1300 \text{ kg}$$

$$m_R = 270 \text{ kg}$$

- Eigenfrequenzen des zwei-Massen-Starrkörper-Systems im Frei-Frei-Zustand:

$$\begin{bmatrix} k - \omega^2 \cdot m_R & -k \\ -k & k - \omega^2 \cdot m_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\omega^2 = k \frac{m_R + m_z}{m_R \cdot m_z}$$

$$\text{mit } k_{\text{ges}} = k_{\text{öl}} = 2,31 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\begin{aligned} \text{ergibt sich } \omega_A &= (2 \cdot 2,31 \cdot 10^8 \frac{1570}{270 \cdot 1300})^{1/2} = 1437,53 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ &\hat{=} 228,8 \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$M = \frac{m_R}{m} = 0,2077$$

$$1 - M = 0,7923$$

$$\Omega = 44,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\delta_1 = 0,0025 \text{ m}$$

$$\delta = \frac{g}{\delta_1 \cdot \Omega^2} = 1,99 \quad (g = 9,81 \text{ m/s}^2)$$

$$i_R^2 = 0,0809 \text{ m}^2$$

$$i_z^2 = 0,98 \text{ m}^2$$

$$I = \frac{m_R \cdot i_R^2}{m_R \cdot i_R^2 + m_z \cdot i_z^2} = 0,0169$$

$$1 - I = 0,9831$$

$$\frac{\delta}{1-M} = 2,5117$$

$$\omega_{sv} = 1022 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\bar{\omega}_{sv_1} = \bar{\omega}_{sv_2} = \bar{\omega}_{sv_3} = \frac{\omega_{sv}}{\Omega} = 23,0$$

$$\zeta_{sv_1} = \zeta_{sv_2} = \zeta_{sv_3} = \zeta_{sv} = 0,5$$

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \frac{214,3}{44,4} = 4,827$$

$$\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \frac{\bar{\omega}_1^2 \cdot M}{\delta} = 2,4319$$

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_1 \quad (\text{gleicher Kraftisolator})$$

$$\bar{k}_3 = \bar{k}_1 \quad (\text{gleicher Kraftisolator})$$

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0,3$$

$$\bar{d}_1 = \bar{d}_2 = \bar{d}_3 = \frac{2 \cdot \bar{\omega}_1 \cdot \zeta_1 \cdot M}{\delta} = 0,3023$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\Delta p_{\max} = 206 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{A_1 \cdot \Delta p_{\max}}{\delta_1 \cdot \Omega^2 \cdot m_R} = 15,48$$

$$\frac{\gamma_1}{1-M} = 19,538$$

$$k^* = \frac{1}{A^2 \cdot \left(\frac{1}{k_{\ddot{o}1}}\right)} = 0,231 \cdot 10^{15} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \left(\frac{1}{k_R} = \frac{1}{k_z} \Rightarrow 0\right)$$

$$\bar{k}^* = \frac{k^*}{\Omega} = 5,2 \cdot 10^{12} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \frac{\text{s}}{\text{rad}}$$

$$k_p = 0,62 \cdot 10^{-12}$$

$$C_L = 1,5 \cdot 10^{-12}$$

$$\tau = \frac{1}{k^* \cdot (k_p + C_L)} = 2,042 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\bar{\tau} = \tau \cdot \Omega = 0,090665$$

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_3 = \bar{\tau} = 0,090665$$

$$k_\varepsilon = 0,664 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k_q = 4,2582 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{mA}$$

$$k_i = 6,413 \cdot 10^{-5} \text{ m}/\text{mA}$$

$$i_{\max} = 10 \text{ mA}$$

$$Q_{p1} = \frac{4,2582 \cdot 10^{-5}}{2,12 \cdot 10^{-12}} = 2,0 \cdot 10^7 \frac{\text{N}/\text{m}^2}{\text{mA}}$$

$$\bar{Q}_{p1} = \bar{Q}_{p2} = \bar{Q}_{p3} = \frac{i_{\max} \cdot Q_{p1}}{\Delta p_{\max} \cdot \bar{\tau}} = 107,5$$

$$\bar{Q}_{p1}^* = \bar{Q}_{p2}^* = \bar{Q}_{p3}^* = \bar{Q}_{p1} \cdot \bar{\tau} = 9,75$$

$$Q_q = \frac{1}{2,12 \cdot 10^{-12}} = 0,4717 \cdot 10^{12}$$

$$\bar{Q}_{p1} = \bar{Q}_{p2} = \bar{Q}_{p3} = \frac{\delta_1 \cdot \Omega \cdot Q_q \cdot A}{\Delta p_{\max} \cdot \bar{\tau}} = 28,03$$

$$\bar{Q}_{q1}^* = \bar{Q}_{q2}^* = \bar{Q}_{q3}^* = \bar{Q}_{q1} \cdot \bar{\tau} = 2,5417$$

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \bar{A}_3 = \frac{A \cdot \Delta_{\max}}{m \cdot g} = \frac{\gamma_1}{\delta} \cdot M = 1,6157$$

Stör-Erregungen

$$\bar{F}_{Rx} = 0,0258 \cdot (\cos 4 \psi + 0,4 \cdot \cos 8 \psi)$$

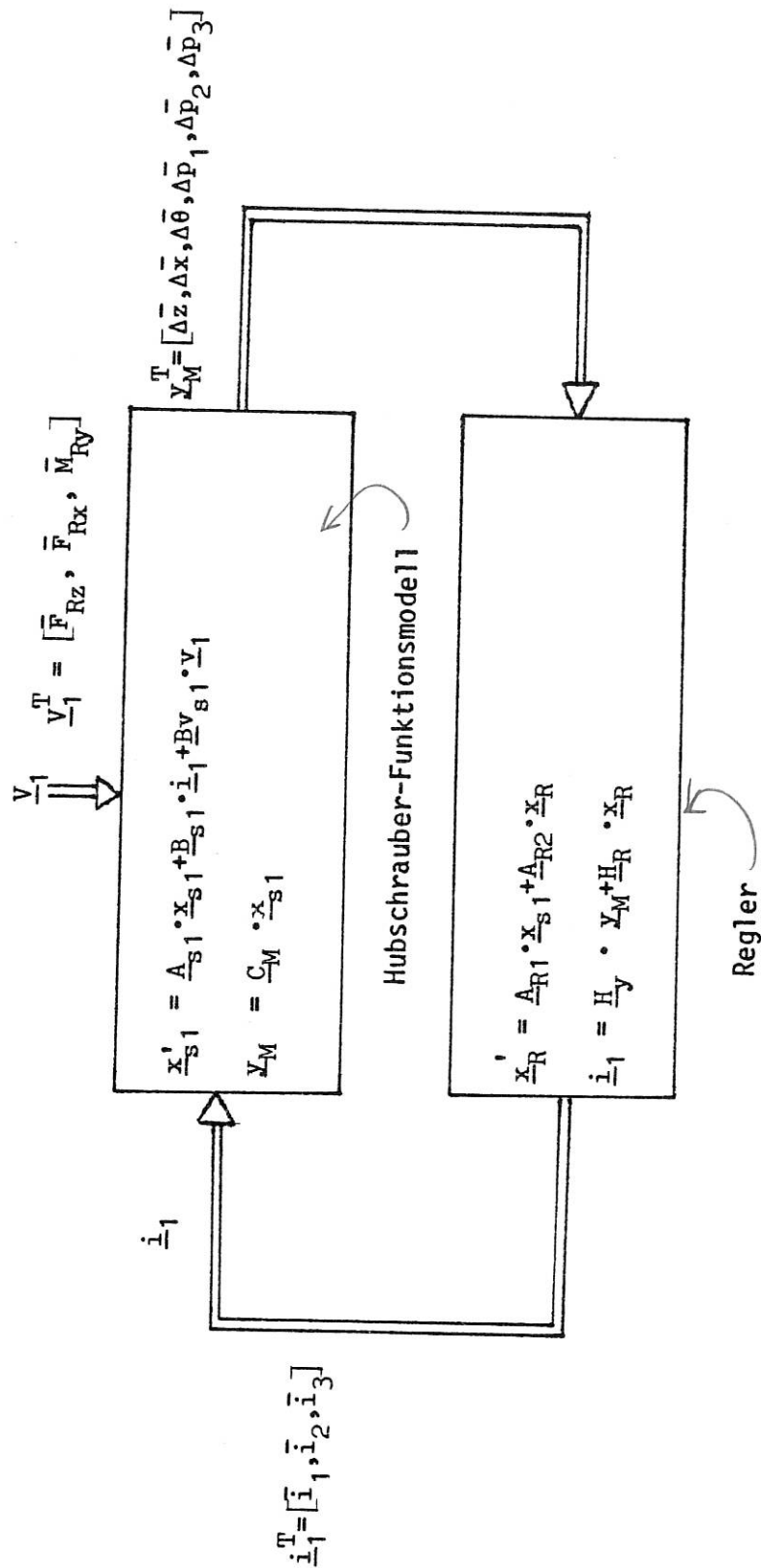
$$\bar{F}_{Rz} = 0,0221 \cdot (\cos 4 \psi + 0,4 \cdot \cos 8 \psi)$$

$$\bar{M}_{Ry} = 0,0154 \cdot (\cos 4 \psi + 0,4 \cdot \cos 8 \psi)$$

4.2 Reglerentwurf nach Rechenmodell 2.1.1

Struktur des geregelten Gesamtsystems:

(geschlossenes System)



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{s1} \\ \dot{x}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{s1} & \underline{0} \\ A_{R1} & A_{R2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{s1} \\ x_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{s1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \dot{i}_1 + \begin{bmatrix} B_{vs1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot v_1$$

Hubschrauber-Funktionsmodell:

$$\dot{x}_{s1} = A_{s1} \cdot x_{s1} + B_{s1} \cdot \dot{i}_1 + B_{vs1} \cdot v_1$$

$$\dot{x}_M = C_M \cdot x_{s1} \quad (\text{Meßgleichung}) ; \quad x_M^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{x}, \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_3]$$

Reglergleichung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_R &= A_R \cdot x_M + A_{R2} \cdot x_R = A_R \cdot C_M \cdot x_{s1} + A_{R2} \cdot x_R = A_{R1} \cdot x_{s1} + A_{R2} \cdot x_R \\ \dot{i}_1 &= H_y \cdot x_M + H_R \cdot x_R \end{aligned}$$

Die Matrix A_{R1} hat bei der Messung von $\Delta \bar{z}, \Delta \bar{x}, \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_3$

folgende Gestalt:

I			II			III		
0	1	0	0	1	0	0	1	0
-16	0	-64	-16	0	-64	-16	0	-64
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Für diese Zustandsrückführung für das System (Seite 41) mit den Wichtungsmatrizen

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q & & & \\ & 1 & & \\ & & 100 & \\ & & & 100 \end{bmatrix}; \underline{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix}; \underline{R} = \begin{bmatrix} 100 & & & \\ & 100 & & \\ & & 100 & \\ & & & 100 \end{bmatrix}$$

88 und die Rückführmatrix

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -1,327 & 0 & 0 & 0,119 & 0 & -1,412 & 0 & -0,28 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 12,832 & 4,9 & 12,165 & 10,22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7944 & 14,032 & -7,72 & 12,6 & -2,0 \\ -9,95 & 0 & 0 & -0,09 & 0 & 0,20 & 0 & -0,89 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & -0,6 & 18,8 & -7,0 & -21,3 & -7,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 23,4 & 0,14 & 45,0 & -1,55 \\ 0 & -2,85 & -1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,0 & 41,2 & 0,73 & 50,2 & -1,12 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wird folgendes Einschwingungsverhalten des Systems erzielt:

Siehe Bilder 4.2.1 bis 4.2.11

Beim Einwirken des Zusatzlastvielfachen $\Delta n = 1,5$

Siehe Bilder 4.2.12 bis 4.2.15

Die Eigenwerte des geschlossenen Systems sind:

Realteile:

- 18,6746
- 18,6746
- 43,8531
- 18,7948
- 18,7948
- 16,3362
- 16,3362
- 33,0488
- 34,8230
- 9,0260
- 1,2998
- 1,2998
- 1,8988
- 1,8988
- 1,3990
- 1,3990
- 5,6102
- 0,5328
- 0,5328
- 0,5242
- 0,5242
- 0,9464
- 0,9464
- 1,5149
- 1,5149
- 0,1307
- 0,2794

Imaginärteile:

- 42,4198
- 42,4198
- 0
- 33,8283
- 33,8283
- 33,9436
- 33,9436
- 0
- 0
- 0
- 7,4713
- 7,4713
- 6,0008
- 6,0008
- 7,3665
- 7,3665
- 0
- 3,8214
- 3,8214
- 2,9153
- 2,9153
- 3,2347
- 3,2347
- 1,1310
- 1,1310
- 0
- 0

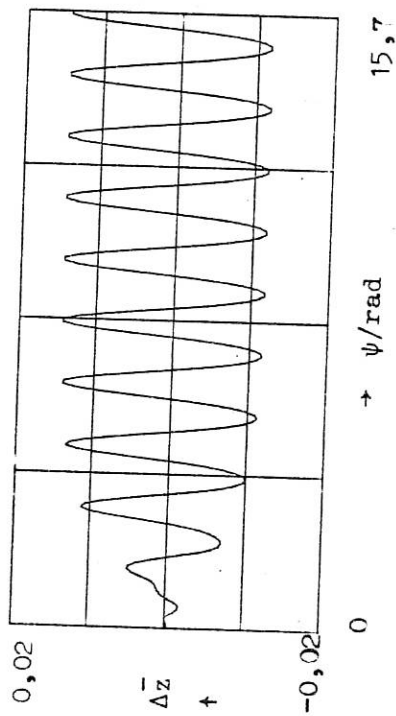


Bild 4.2.1: Relativauslenkung $\Delta \bar{z}$

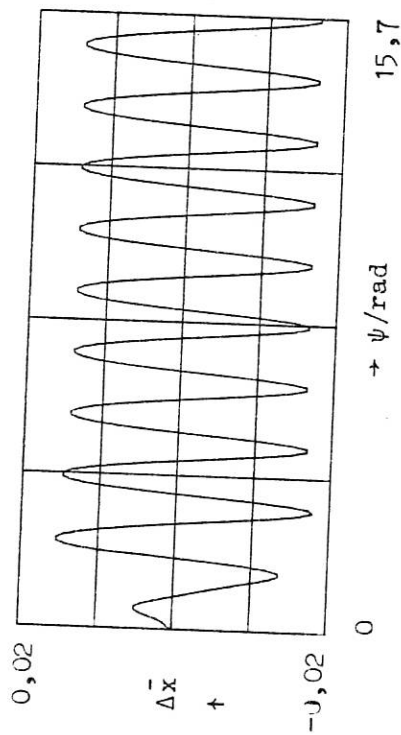


Bild 4.2.2: Relativauslenkung $\Delta \bar{x}$

bei Rückführung von $\Delta \bar{x}$, $\Delta \bar{z}$, $\Delta \bar{\theta}$ und $\Delta \bar{p}_1$, $\Delta \bar{p}_2$, $\Delta \bar{p}_3$ (Aktuatordruckdifferenzen)

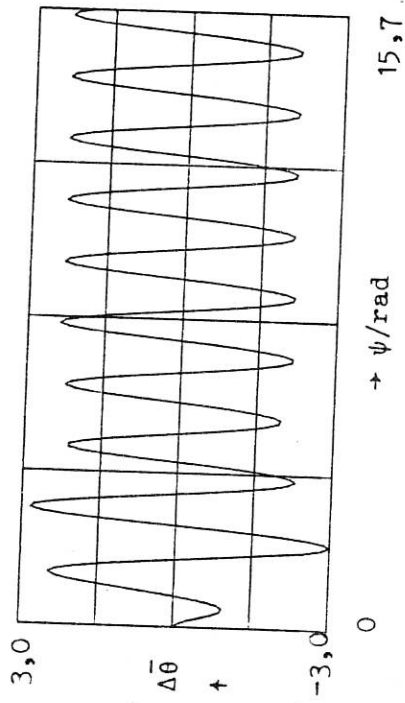


Bild 4.2.3: Relativdrehung $\Delta \bar{\theta}$

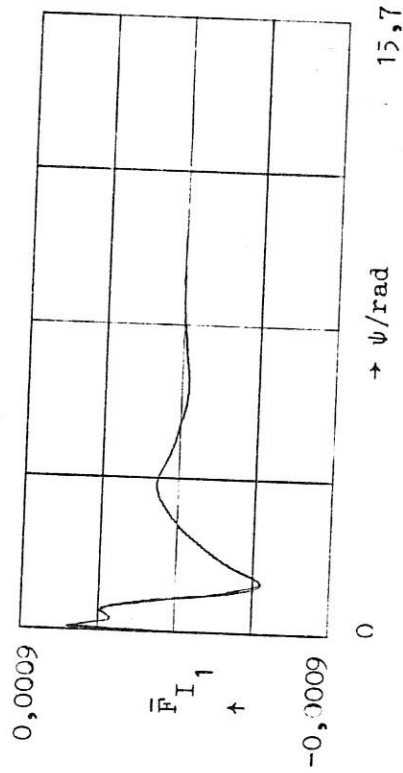


Bild 4.2.4: Isolatorkraft \bar{F}_{I1}

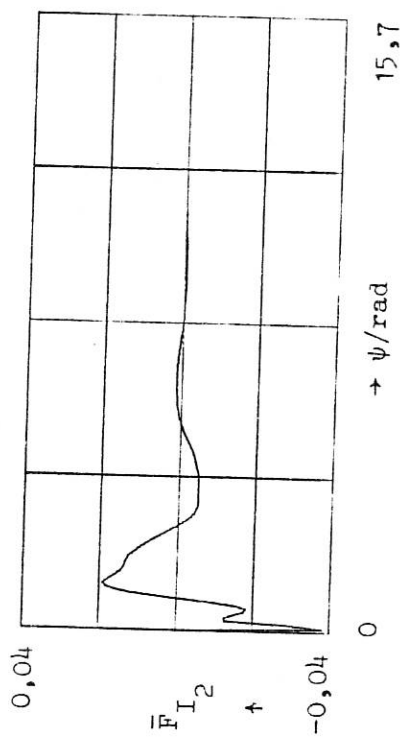


Bild 4.2.5: Isolatorkraft \bar{F}_{I_2}

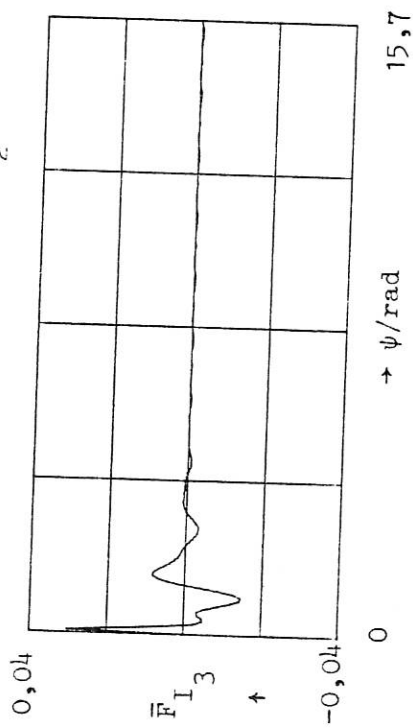


Bild 4.2.6: Isolatorkraft \bar{F}_{I_3}

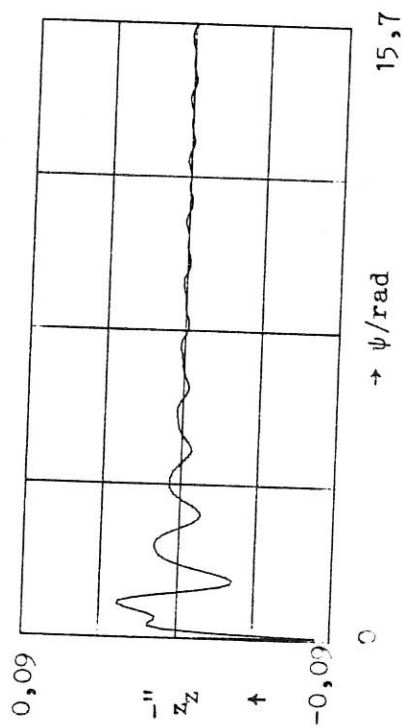


Bild 4.2.7: Zellenbeschleunigung \ddot{z}_z

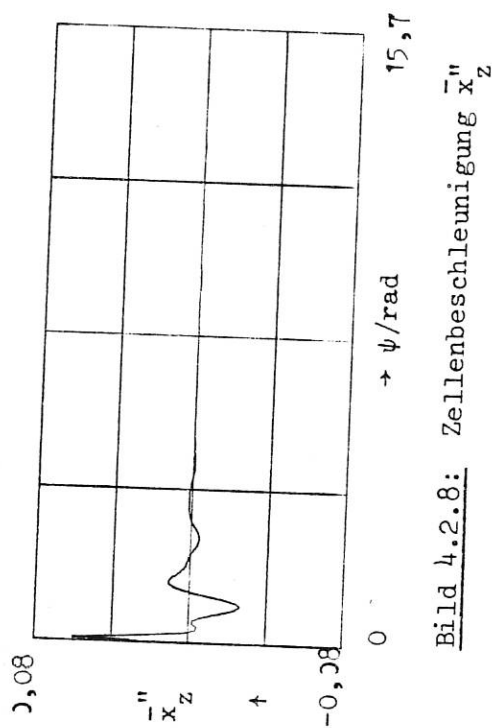


Bild 4.2.8: Zellenbeschleunigung \ddot{x}_z

bei Rückführung von $\Delta \bar{x}$, $\Delta \bar{z}$, $\Delta \bar{\theta}$ und $\Delta \bar{p}_1$, $\Delta \bar{p}_2$, $\Delta \bar{p}_3$ (Aktuatordruckdifferenzen)

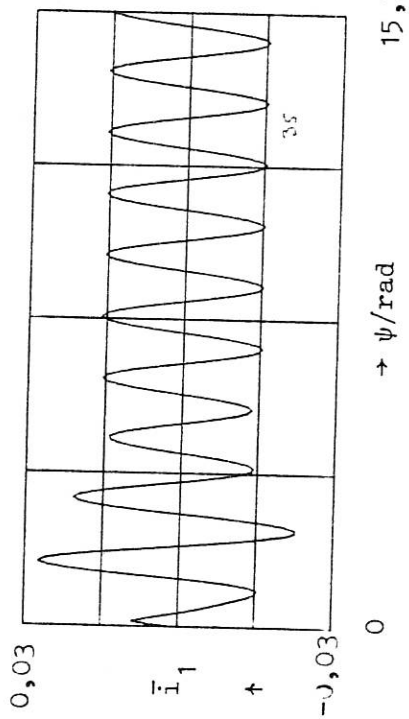


Bild 4.2.9: Ventilsteuersstrom \bar{i}_1

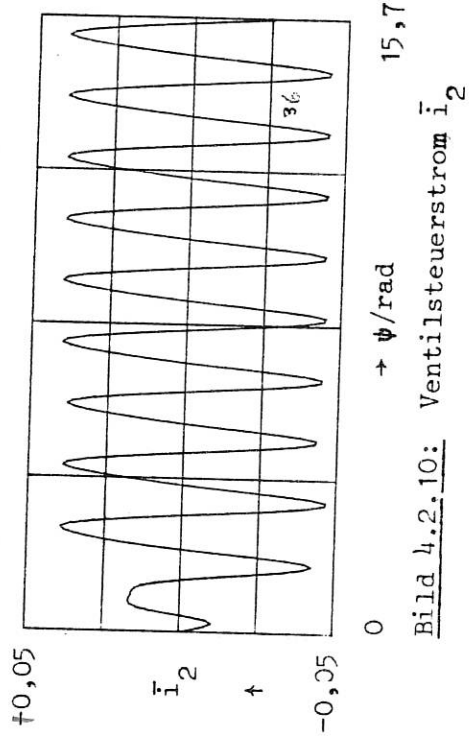


Bild 4.2.10: Ventilsteuersstrom \bar{i}_2

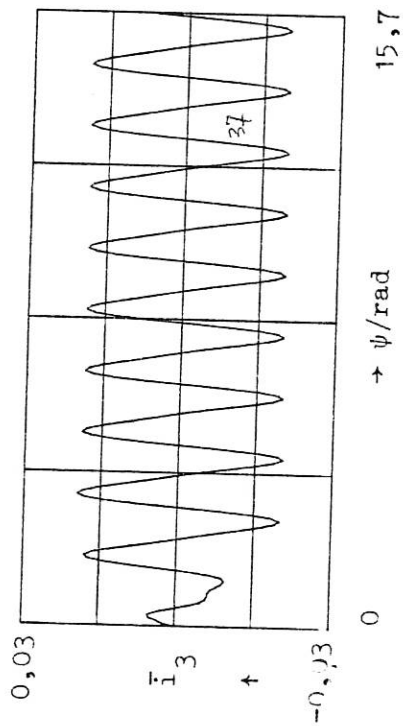


Bild 4.2.11: Ventilsteuersstrom \bar{i}_3

bei Rückführung von $\Delta \bar{x}$, $\Delta \bar{z}$, $\Delta \bar{\theta}$ und $\Delta \bar{p}_1$, $\Delta \bar{p}_2$, $\Delta \bar{p}_3$ (Aktuatorendruckdifferenzen)

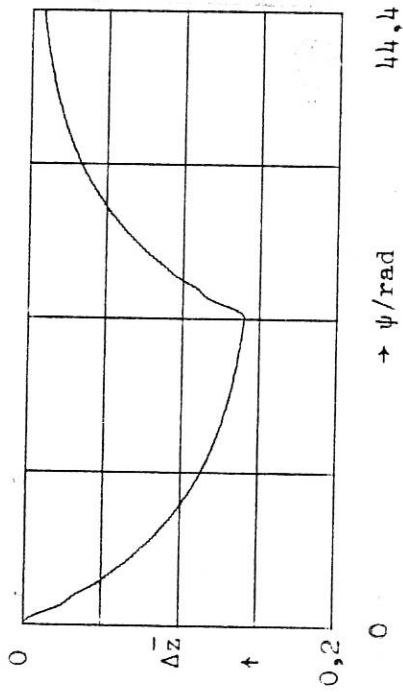


Bild 4.2.12: Relativauslenkung Δz

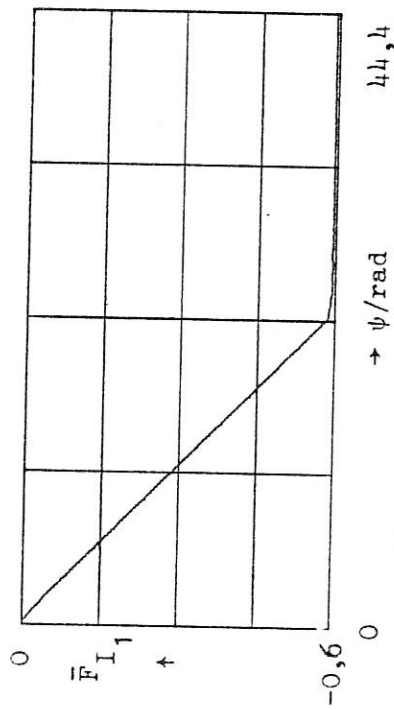


Bild 4.2.13: Isolatorkraft \bar{F}_{I1}

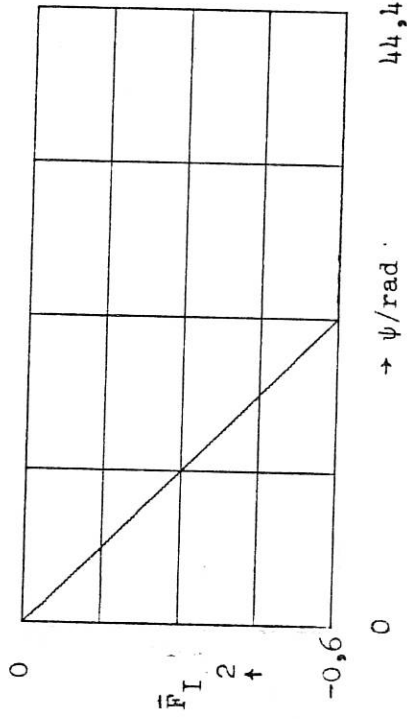


Bild 4.2.14: Isolatorkraft \bar{F}_{I2}

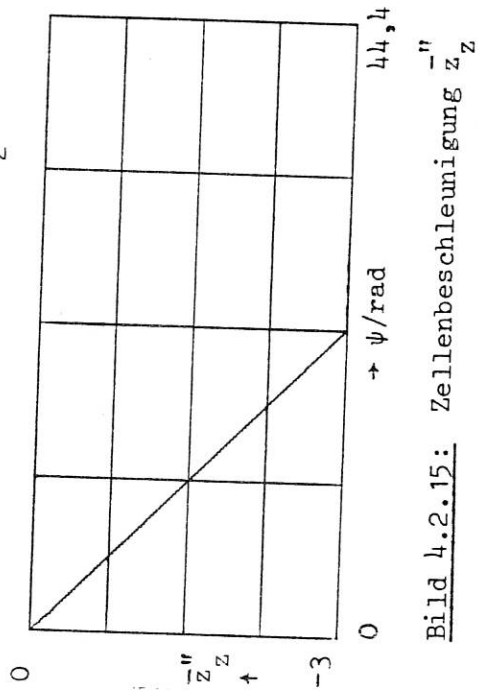
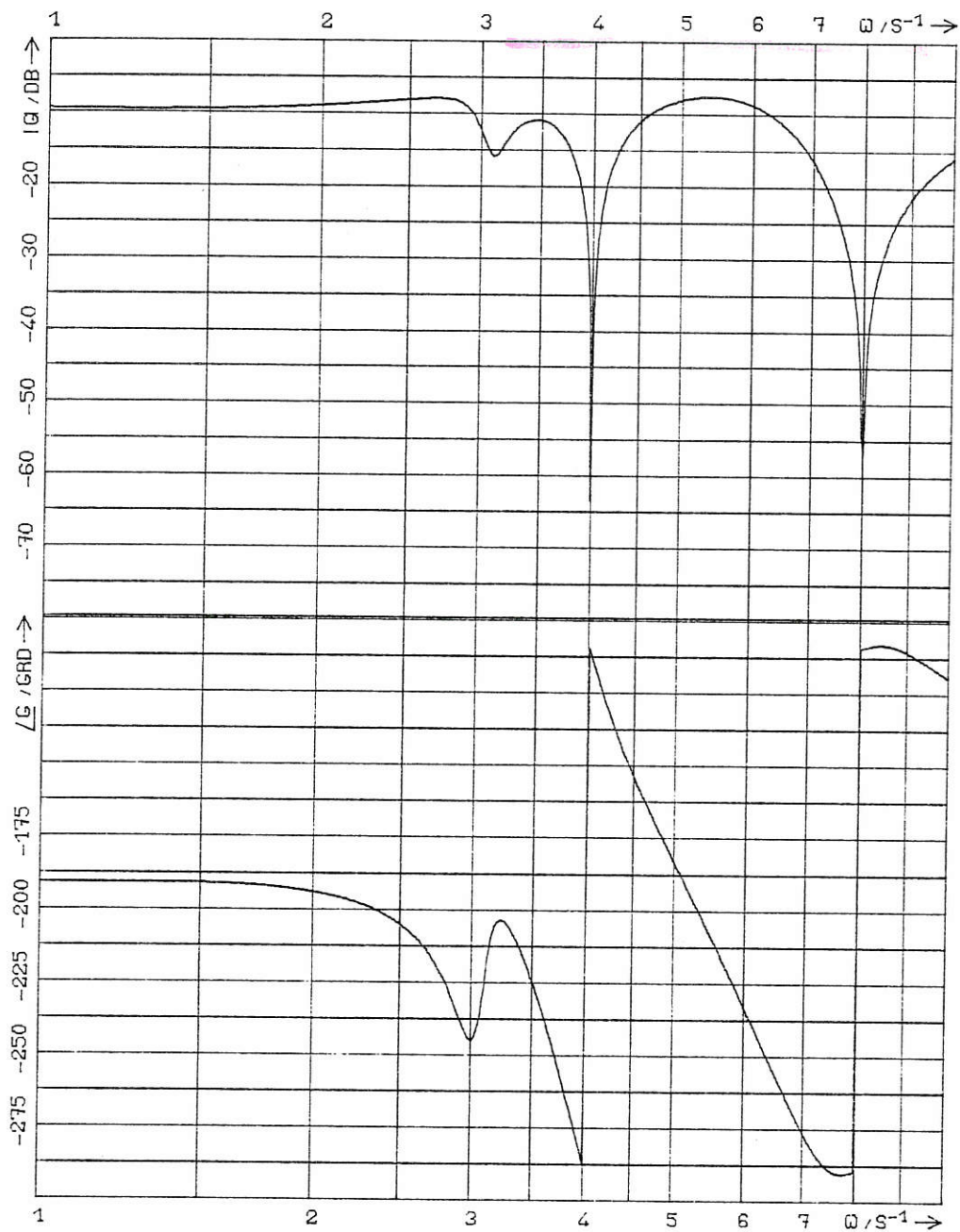


Bild 4.2.15: Zellenbeschleunigung z_z''

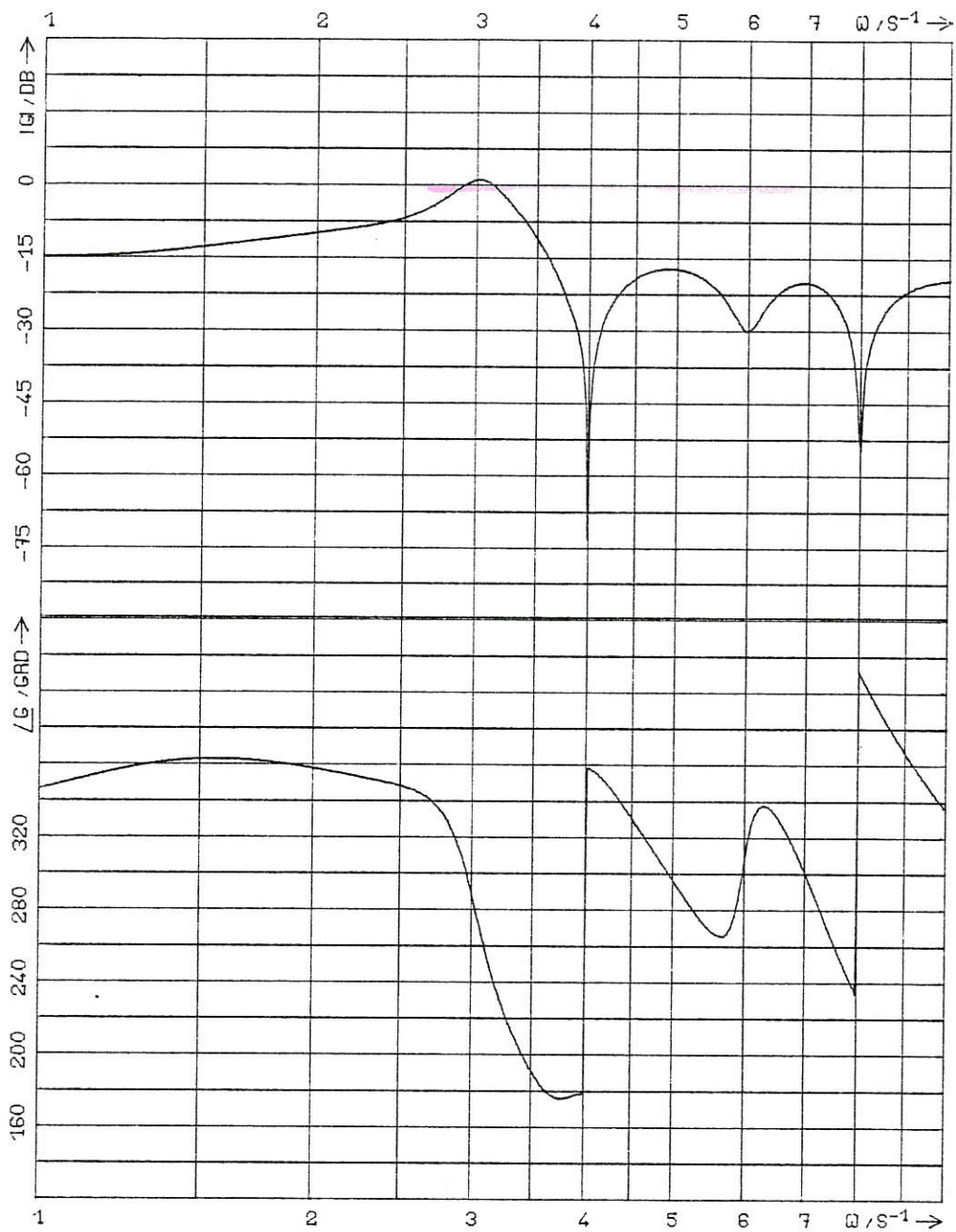
bei Rückführung von Δx , Δz , $\Delta \theta$ und $\Delta \bar{p}_1$, $\Delta \bar{p}_2$, $\Delta \bar{p}_3$ (Aktuatordruckdifferenzen)



STÖRFREQUENZGANG $F_1(I)/F_2(R)$
EINGANG $F_2(R)$ AUSGANG $F_1(I)$

Bild 4.2.16: Störfrequenzgang

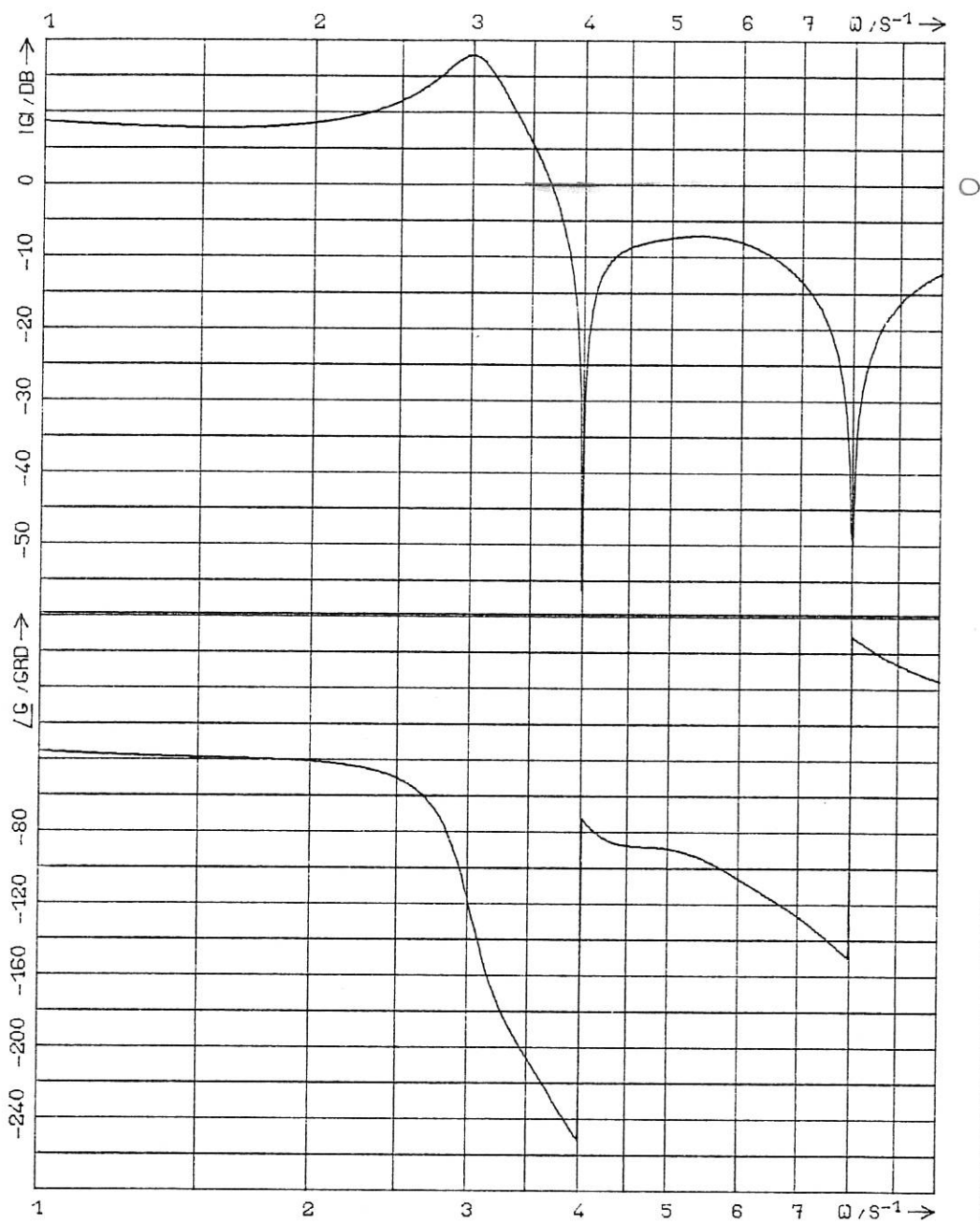
$$|\bar{F}_{s_{11}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_1}(j\omega)}{\bar{F}_{R_z}(j\omega)} \right|$$



STÖRFREQUENZGANG $F_1(I)/F_X(R)$
EINGANG $F_X(R)$ AUSGANG $F_1(I)$

Bild 4.2.17: Störfrequenzgang

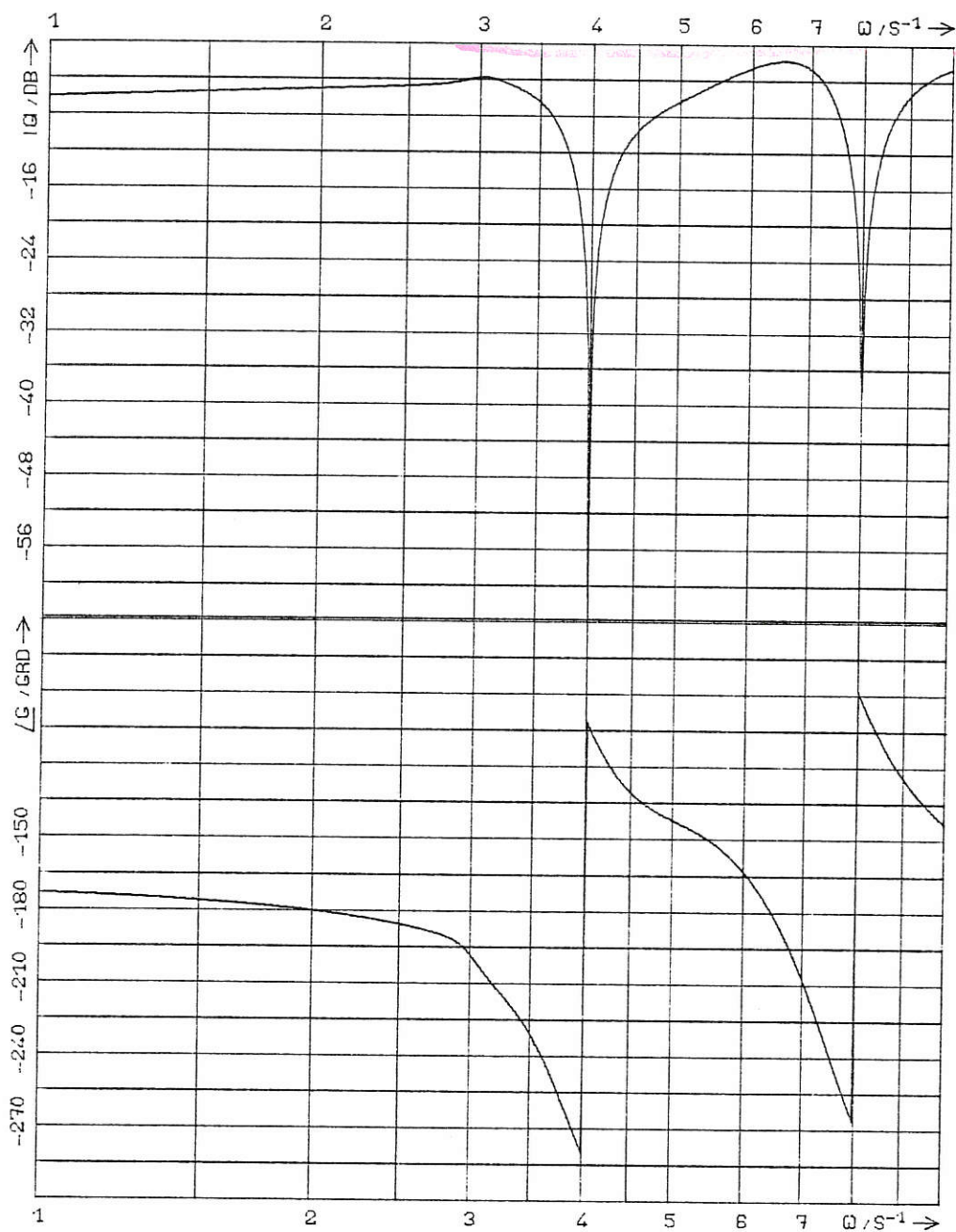
$$|\bar{F}_{s_{12}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_1}(j\omega)}{\bar{F}_{R_x}(j\omega)} \right|$$



STÖRERFQUENZGANG $F1(I)/MY(R)$
EINGANG $MY(R)$ AUSGANG $F1(I)$

Bild 4.2.18: Störfrequenzgang

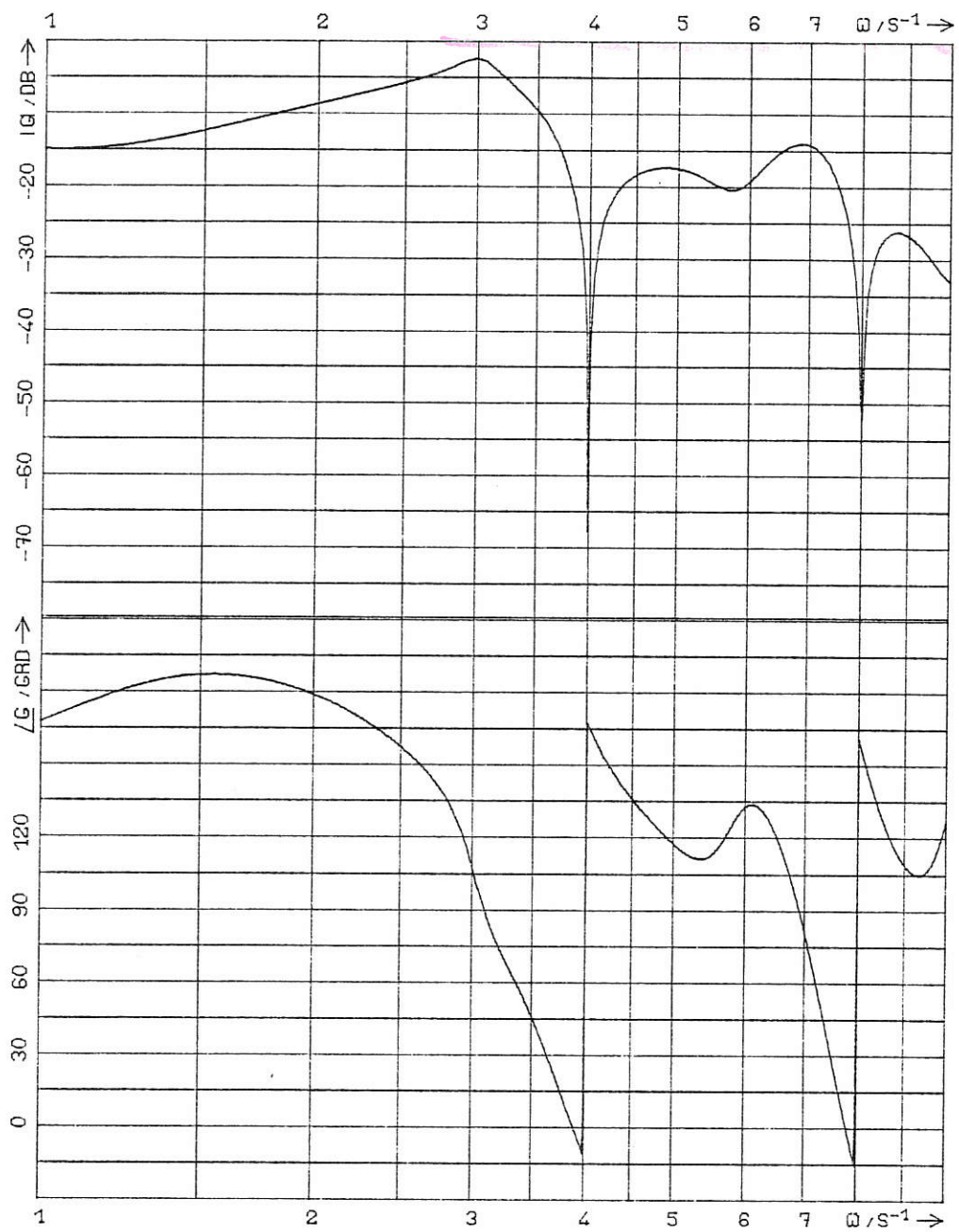
$$|\bar{F}_{s13}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I1}(j\omega)}{\bar{M}_{Ry}(j\omega)} \right|$$



STÖRFREQUENZGANG $F_2(I)/F_2(R)$
EINGANG $F_2(R)$ AUSGANG $F_2(I)$

Bild 4.2.19: Störfrequenzgang

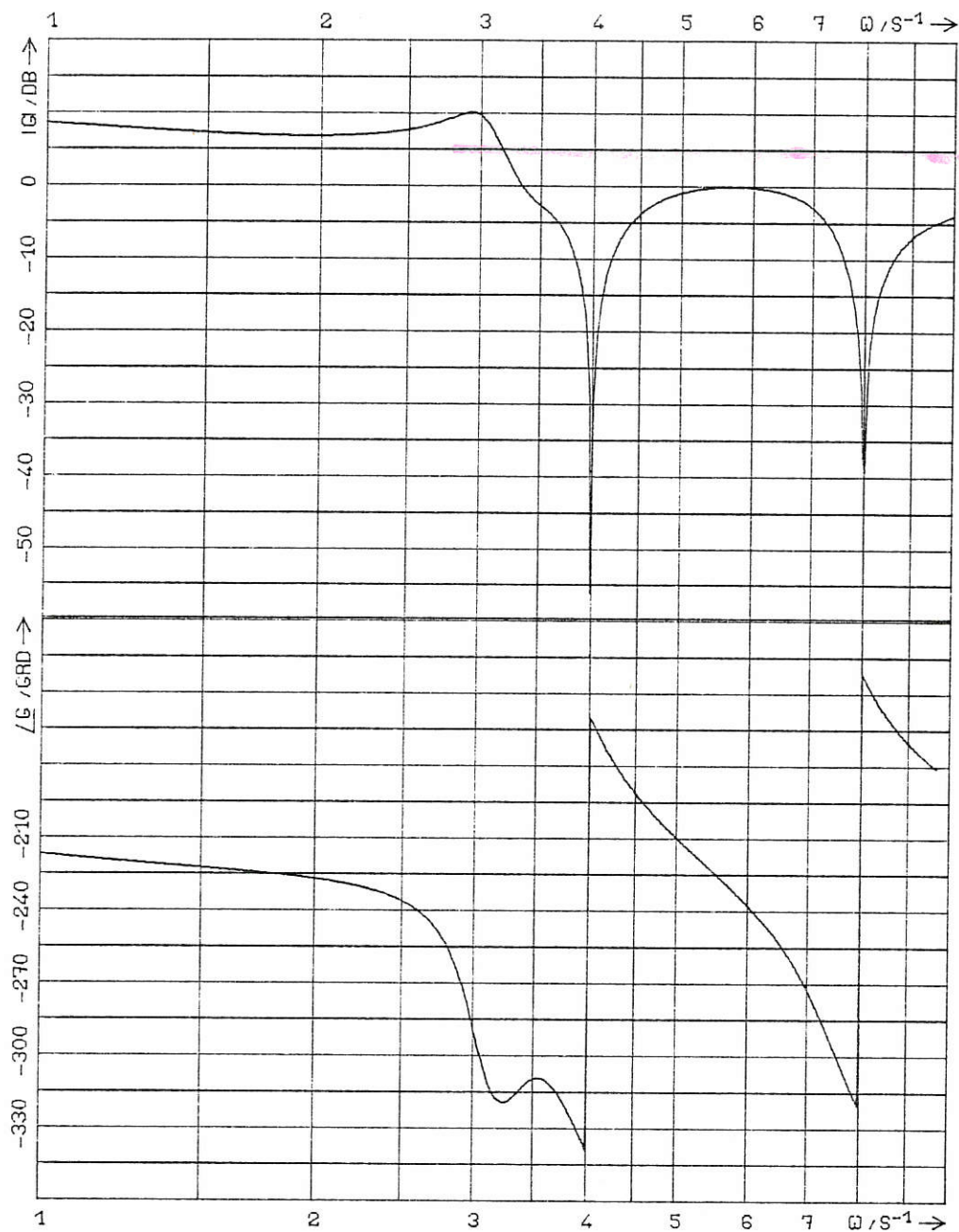
$$|\bar{F}_{s_{21}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_2}(j\omega)}{\bar{F}_{R_z}(j\omega)} \right|$$



STÖRFREQUENZGANG $F_2(I)/F_X(R)$
EINGANG $F_X(R)$ AUSGANG $F_2(I)$

Bild 4.2.20: Störfrequenzgang

$$|\bar{F}_{s_{22}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_2}(j\omega)}{\bar{F}_{R_x}(j\omega)} \right|$$



STÖRFREQUENZGANG $F_2(I)/M_Y(R)$
EINGANG $M_Y(R)$ AUSGANG $F_2(I)$

Bild 4.2.21: Störfrequenzgang

$$|\bar{F}_{s_{23}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_2}(j\omega)}{\bar{M}_{R_y}(j\omega)} \right|$$

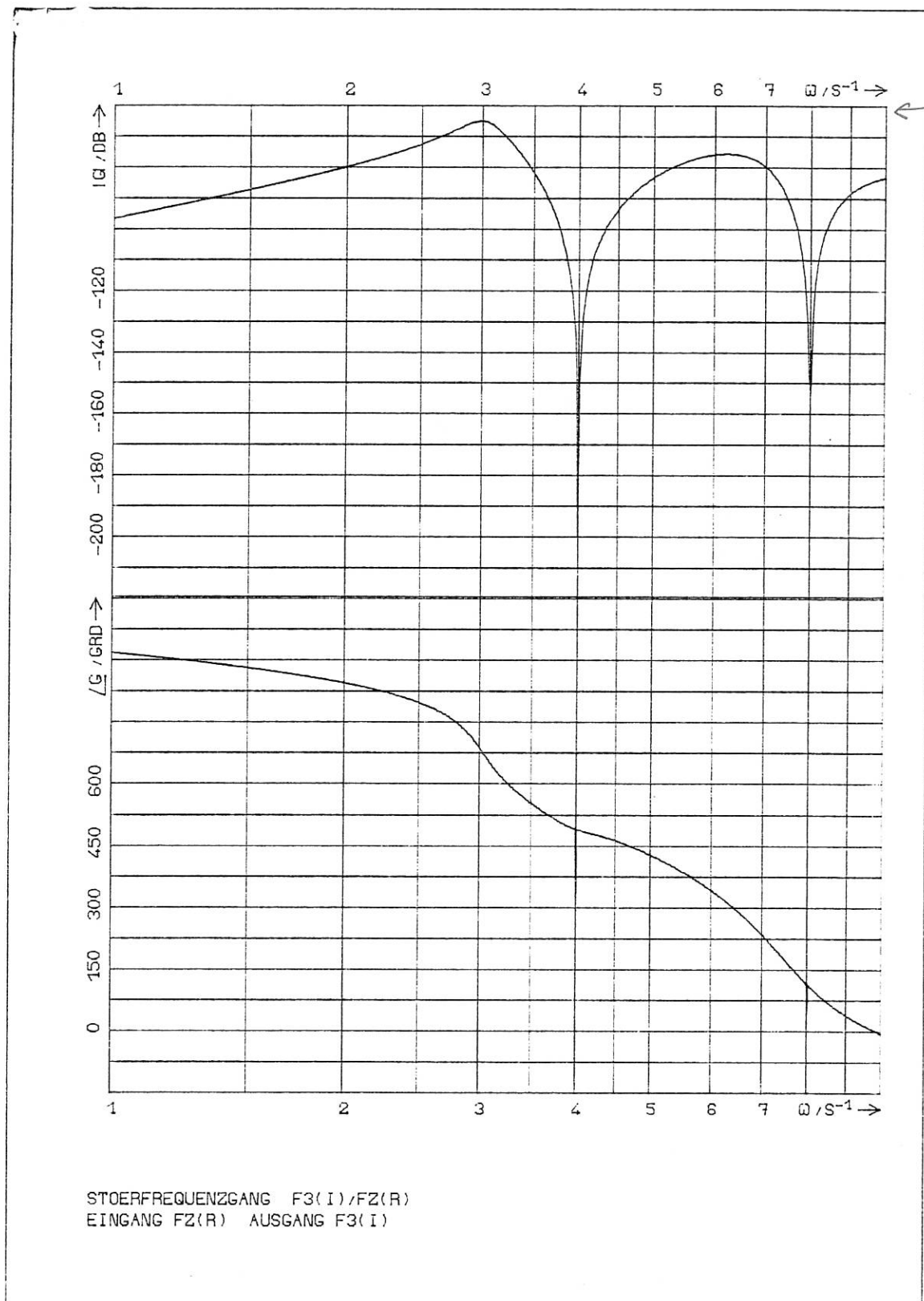
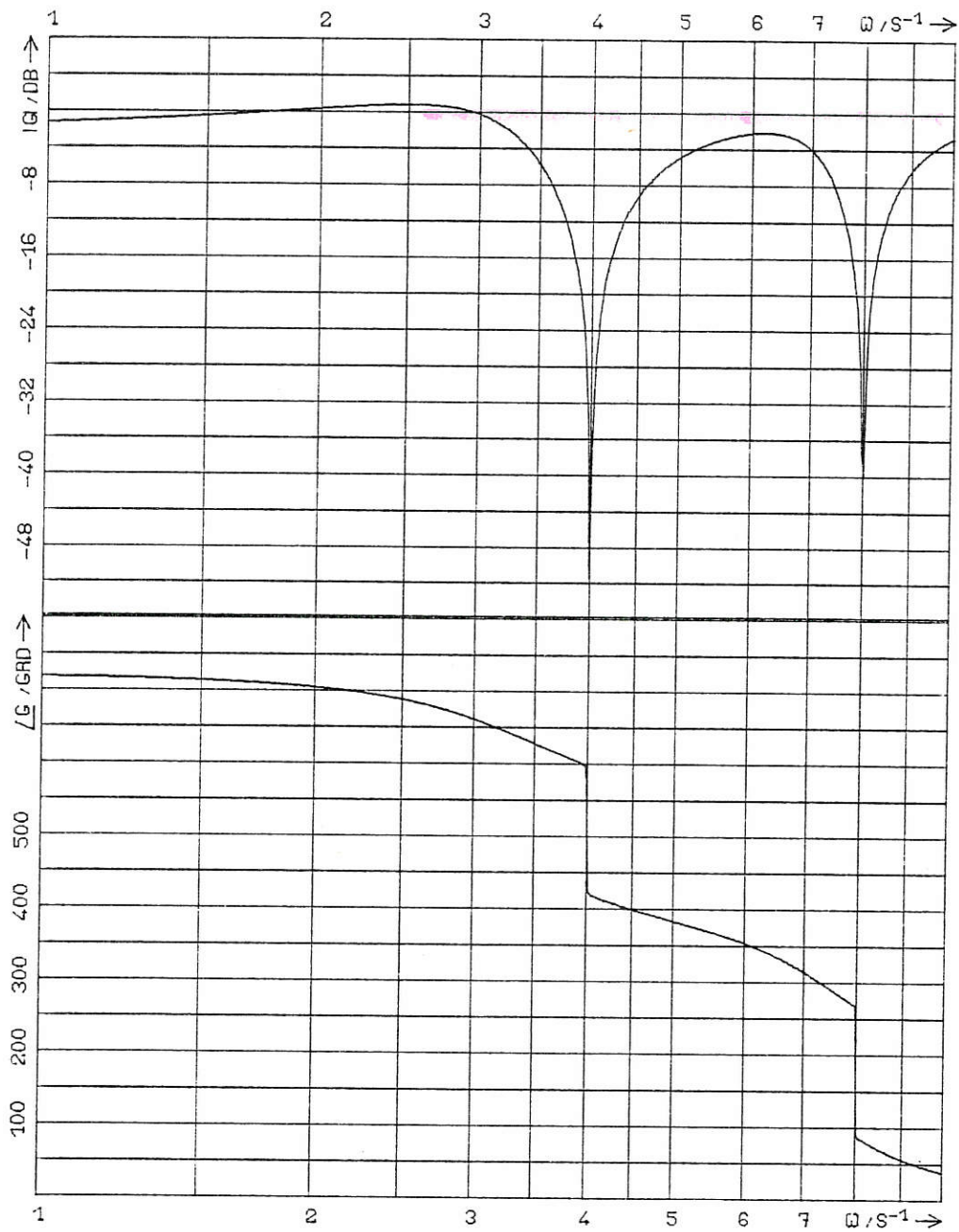


Bild 4.2.22: Störfrequenzgang

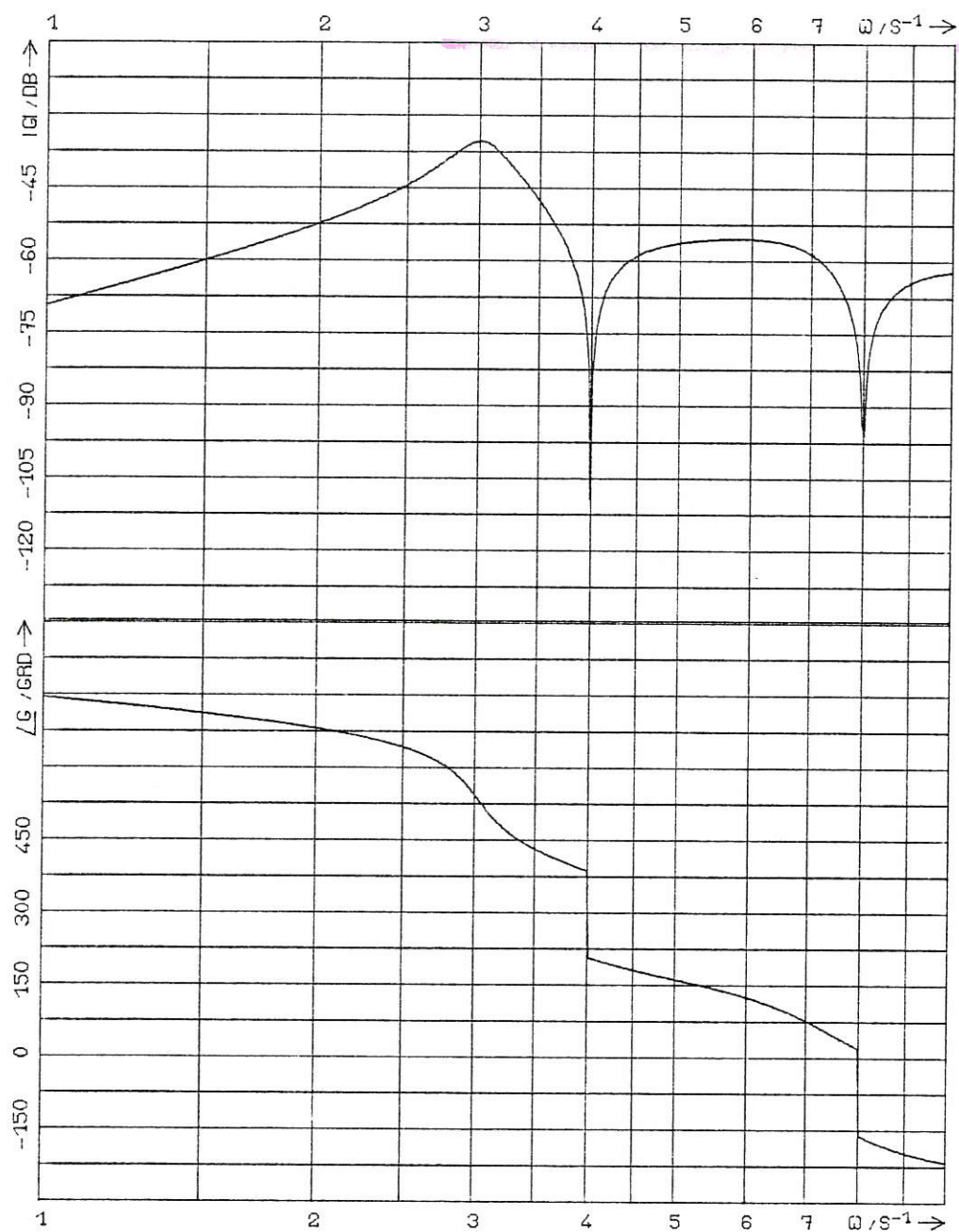
$$|\bar{F}_{s_{31}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_3}(j\omega)}{\bar{F}_{R_2}(j\omega)} \right|$$



STOERFREQUNZGANG $F_3(I)/F_X(R)$
EINGANG $F_X(R)$ AUSGANG $F_3(I)$

Bild 4.2.23: Störfrequenzgang

$$|\bar{F}_{s_{32}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_3}(j\omega)}{\bar{F}_{R_x}(j\omega)} \right|$$



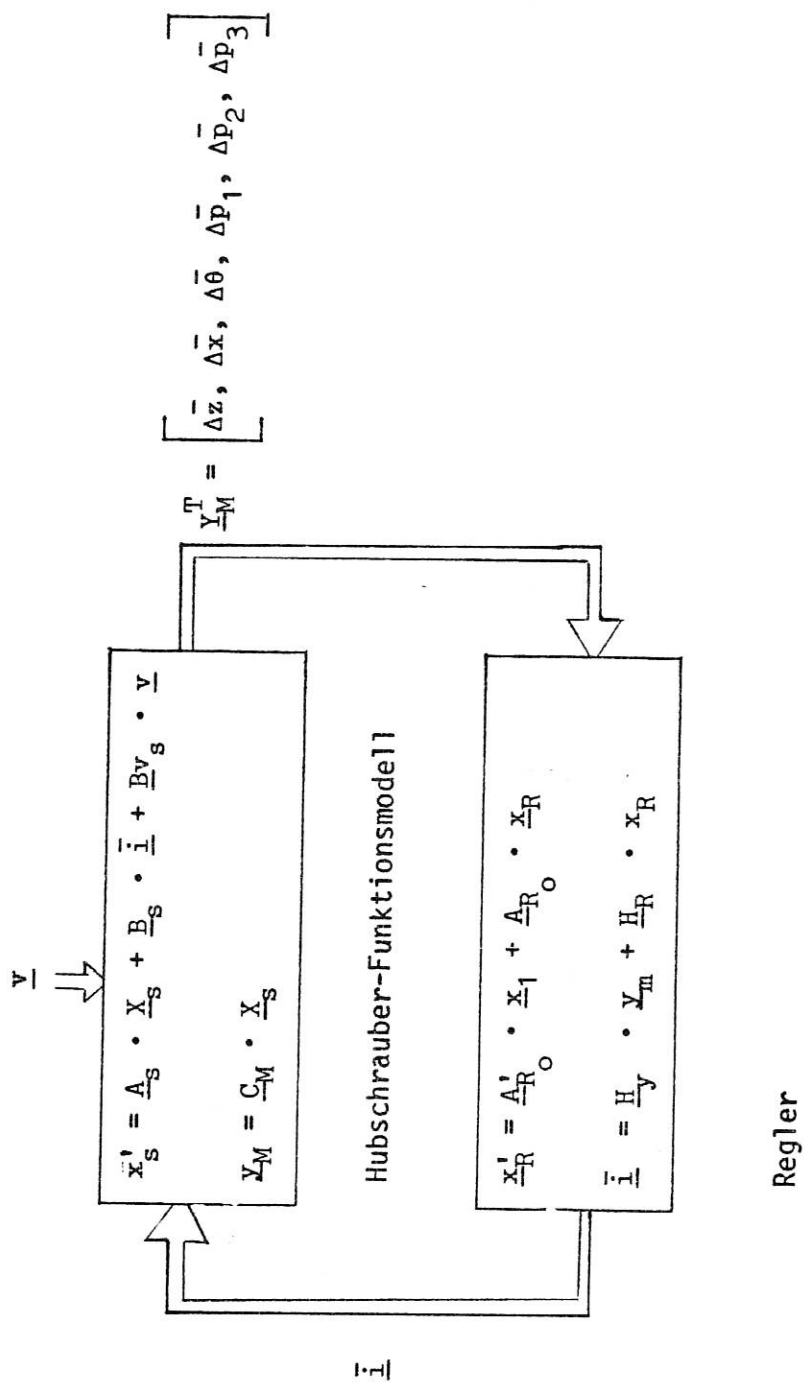
STÖRFREQUENZGANG $F_3(I)/M_Y(R)$
EINGANG $M_Y(R)$ AUSGANG $F_3(I)$

Bild 4.2.24: Störfrequenzgang

$$|\bar{F}_{s33}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I3}(j\omega)}{\bar{M}_{Ry}(j\omega)} \right|$$

4.3 Reglerentwurf nach Rechenmodell 2.2

Struktur des gereglten Gesamtsystems:
(geschlossenes System)



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{x}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_S & 0 \\ A_{Ro} & A_{Ro} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_S \\ x_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_S \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{i} + \begin{bmatrix} B_{Vs} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{v}$$

Hubschrauber-Funktionsmodell:

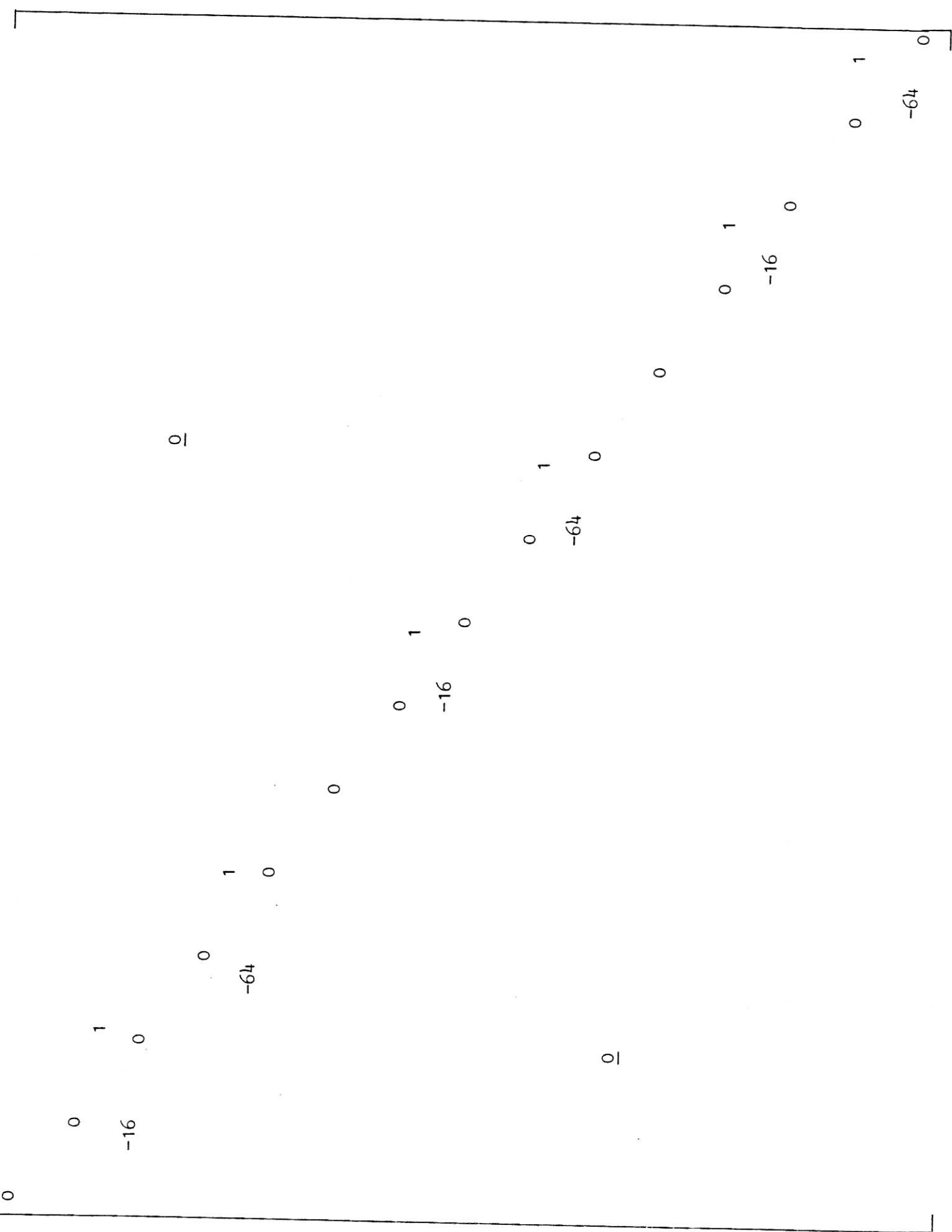
$$\dot{x}_S = A_S \cdot x_S + B_S \cdot \dot{i} + B_{Vs} \cdot \dot{v}$$

$$y_M = C_M \cdot x_S \quad (\text{Messgleichung}) ; \quad y_M^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{x}, \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_3]$$

Reglergleichung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_R &= A_{Ro}^* \cdot x_S + A_{Ro} \cdot x_R = A_R^* \cdot C_M \cdot x_S + A_{Ro} \cdot x_R = A_R \cdot x_S + A_{Ro} \cdot x_R \\ \dot{i} &= H_y \cdot y_M + H_R \cdot x_R \end{aligned}$$

Die Matrix A_R hat bei der Messung von $\Delta \bar{z}, \Delta \bar{x}, \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_3$ folgende Gestalt:



0
-16
1
0

0
-64
1
0

0

0
-16
1
0

0
-64
1
0

0

0
-16
1
0

0
1

-64

0

108

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} & & \\ & Q & \\ & & \ddots \\ & & & q \\ & & & q \\ & & & & q \end{bmatrix}; \quad \underline{q} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 100 & & & \\ & & 100 & & \\ & & & 40 & \\ & & & & 40 \end{bmatrix}; \quad \underline{R} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & 100 & & & \\ & & 100 & & \\ & & & 100 & \\ & & & & 100 \end{bmatrix}$$

und der Rückführmatrix

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -4,02 & 0 & 0 & 0 & 0,139 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,74 & 0,36 & 0 & 0,7007 & 15,18 & -6,57 & 4,066 & 1,19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,707 & 15,18 & -6,57 & 4,066 & -2,46 \\ -4,02 & 0 & 0 & 0 & 0,139 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,36 & -0,74 & 0 & -0,707 & 15,18 & -6,57 & 4,066 & -2,46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,707 & 24,17 & 3,5 & 4,6 & 1,2 \\ 0 & 0 & -1,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 41,0 & 1 & 50,1 & 0,034 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wird folgendes Einschwingungsverhalten des Systems erzielt:

Siehe Bilder 4.3.1 bis 4.3.11

Beim Einwirken des Zusatzlastvielfachen $\Delta n = 1,5$

Siehe Bilder 4.3.12 bis 4.3.15

Die Eigenwerte des geschlossenen Systems sind:

Realteile:

- 10,7240
- 10,7240
- 20,5470
- 20,5470
- 11,2621
- 11,2621
- 12,0983
- 12,0983
- 26,6972
- 26,6972
- 23,9068
- 23,9068
- 7,63519
- 1,19670
- 1,19670
- 0,06982
- 0,06982
- 1,49347
- 1,49347
- 1,400
- 1,400
- 0,19753
- 5,5737
- 0,5232
- 0,5232
- 0,9456
- 0,9456
- 1,53331
- 1,53331
- 0,02793

Imaginärteile:

- 38,856
- 38,856
- 19,570
- 19,570
- 34,856
- 34,856
- 32,255
- 32,255
- 14,396
- 14,396
- 16,832
- 16,832
- 0
- 7,555
- 7,555
- 3,667
- 3,667
- 7,25
- 7,25
- 7,36
- 7,36
- 0
- 0
- 2,916
- 2,916
- 3,2332
- 3,2332
- 1,1452
- 1,1452
- 0

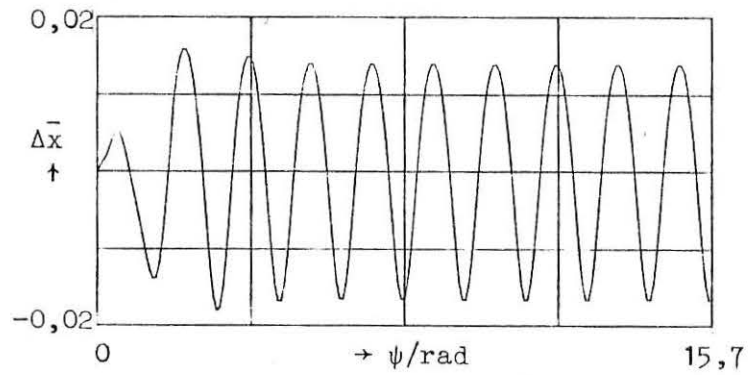


Bild 4.3.1: Relativauslenkung $\Delta \bar{x}$

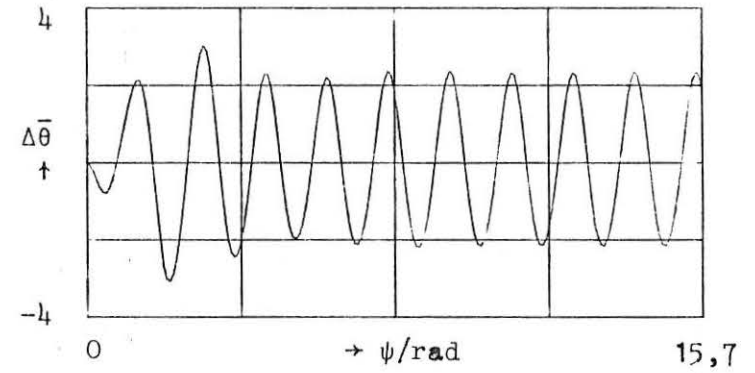


Bild 4.3.3: Relativdrehung $\Delta \bar{\theta}$

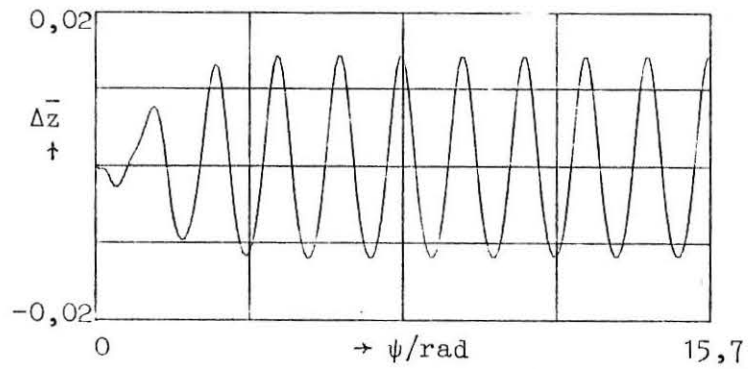


Bild 4.3.2: Relativauslenkung $\Delta \bar{z}$

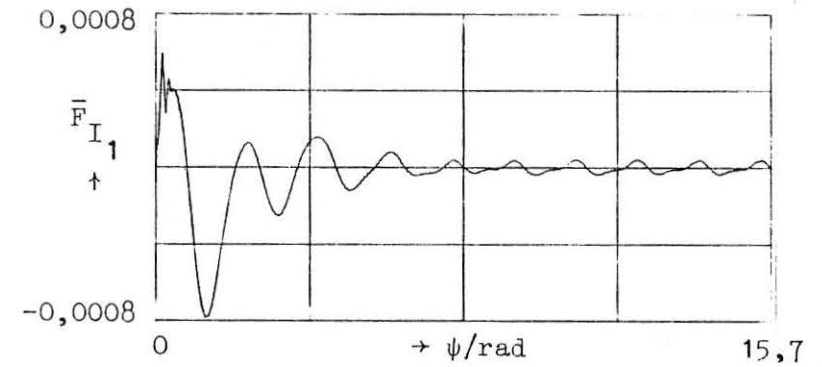


Bild 4.3.4: Isolatorkraft \bar{F}_{I_1}

bei Rückführung von $\Delta \bar{x}$, $\Delta \bar{z}$, $\Delta \bar{\theta}$ und $\Delta \bar{p}_1$, $\Delta \bar{p}_2$, $\Delta \bar{p}_3$ (Aktuatorendruckdifferenzen)

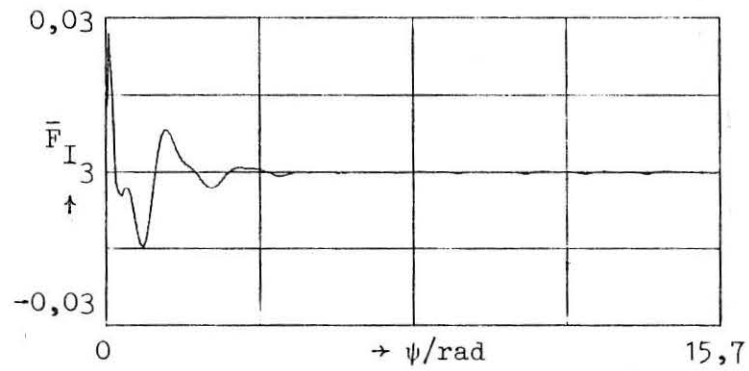


Bild 4.3.5: Isolatorkraft \bar{F}_{I_3}

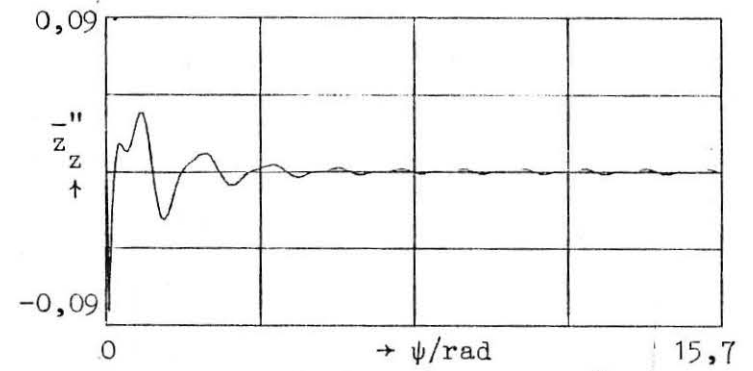


Bild 4.3.7: Zellenbeschleunigung \bar{z}_z''

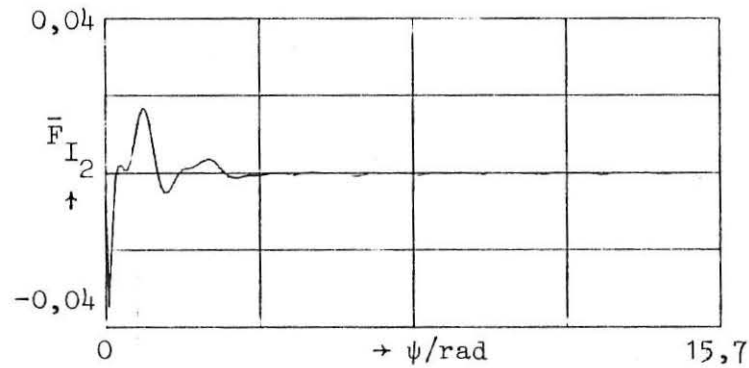


Bild 4.3.6: Isolatorkraft \bar{F}_{I_2}

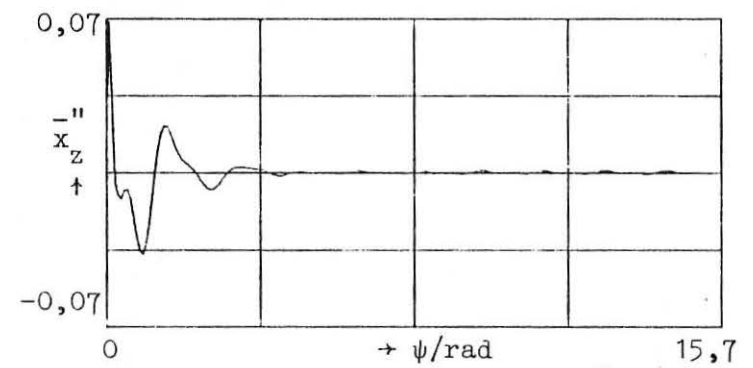


Bild 4.3.8: Zellenbeschleunigung \bar{x}_z''

bei Rückführung von $\Delta\bar{x}$, $\Delta\bar{z}$, $\Delta\bar{\theta}$ und $\Delta\bar{p}_1$, $\Delta\bar{p}_2$, $\Delta\bar{p}_3$ (Aktuatorendruckdifferenzen)

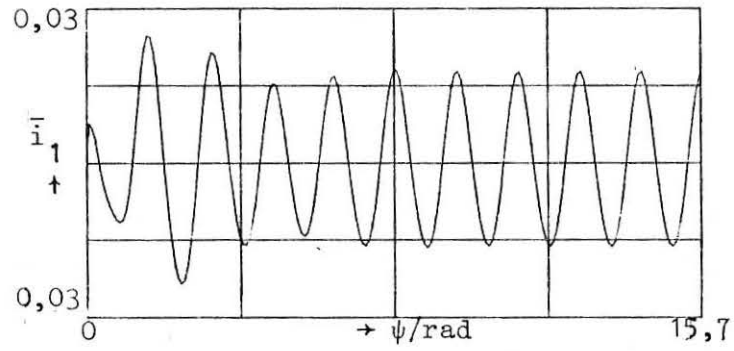


Bild 4.3.9: Ventilsteuerstrom \bar{i}_1

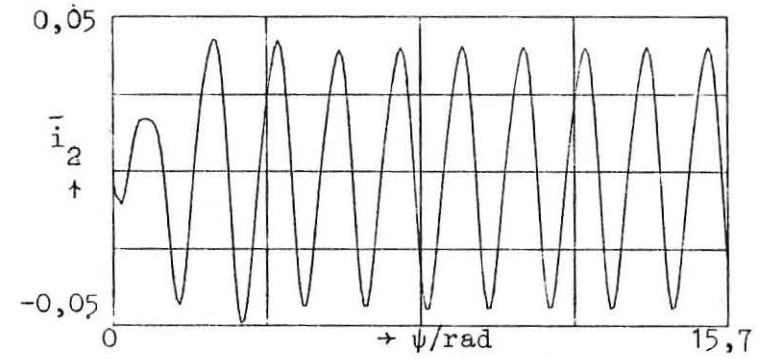


Bild 4.3.10: Ventilsteuerstrom \bar{i}_2

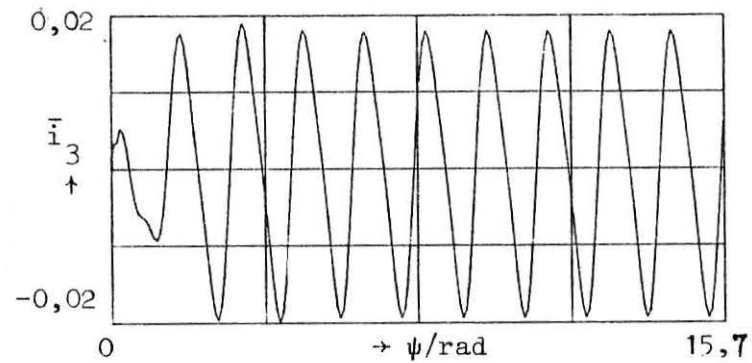


Bild 4.3.11: Ventilsteuerstrom \bar{i}_3

bei Rückführung von $\Delta \bar{x}$, $\Delta \bar{z}$, $\Delta \bar{\theta}$ und $\Delta \bar{p}_1$, $\Delta \bar{p}_2$, $\Delta \bar{p}_3$ (Aktuatorendruckdifferenzen)

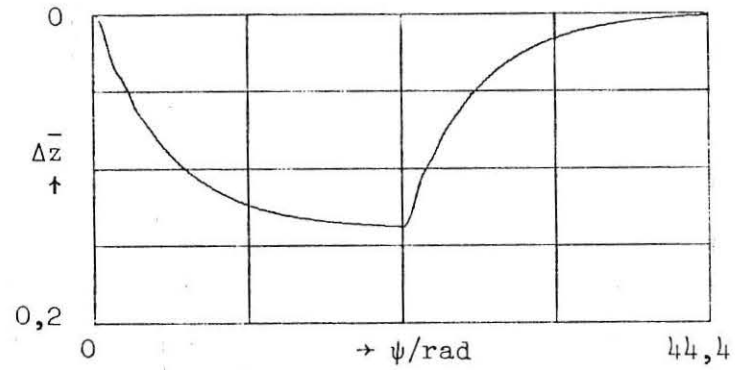


Bild 4.3.12: Relativauslenkung $\Delta \bar{z}$

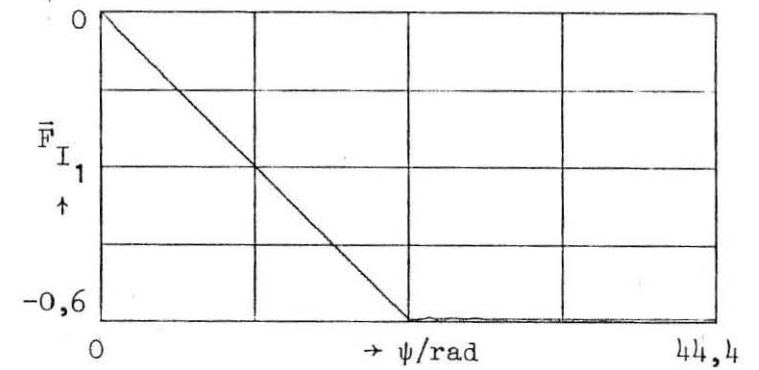


Bild 4.3.14: Isolatorkraft \bar{F}_{I1}

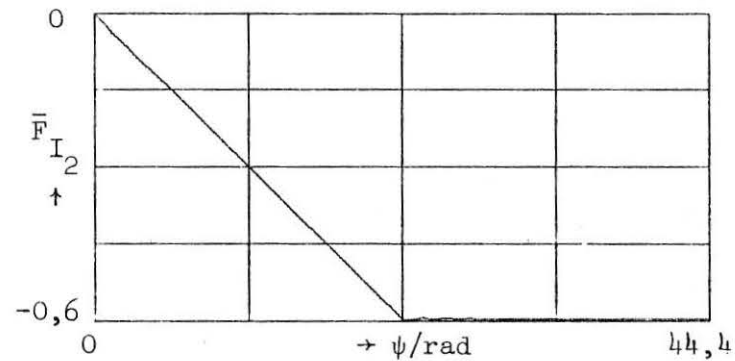


Bild 4.3.13: Isolatorkraft \bar{F}_{I2}

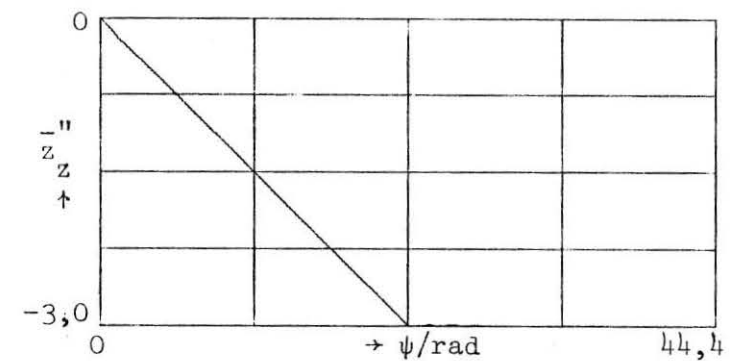
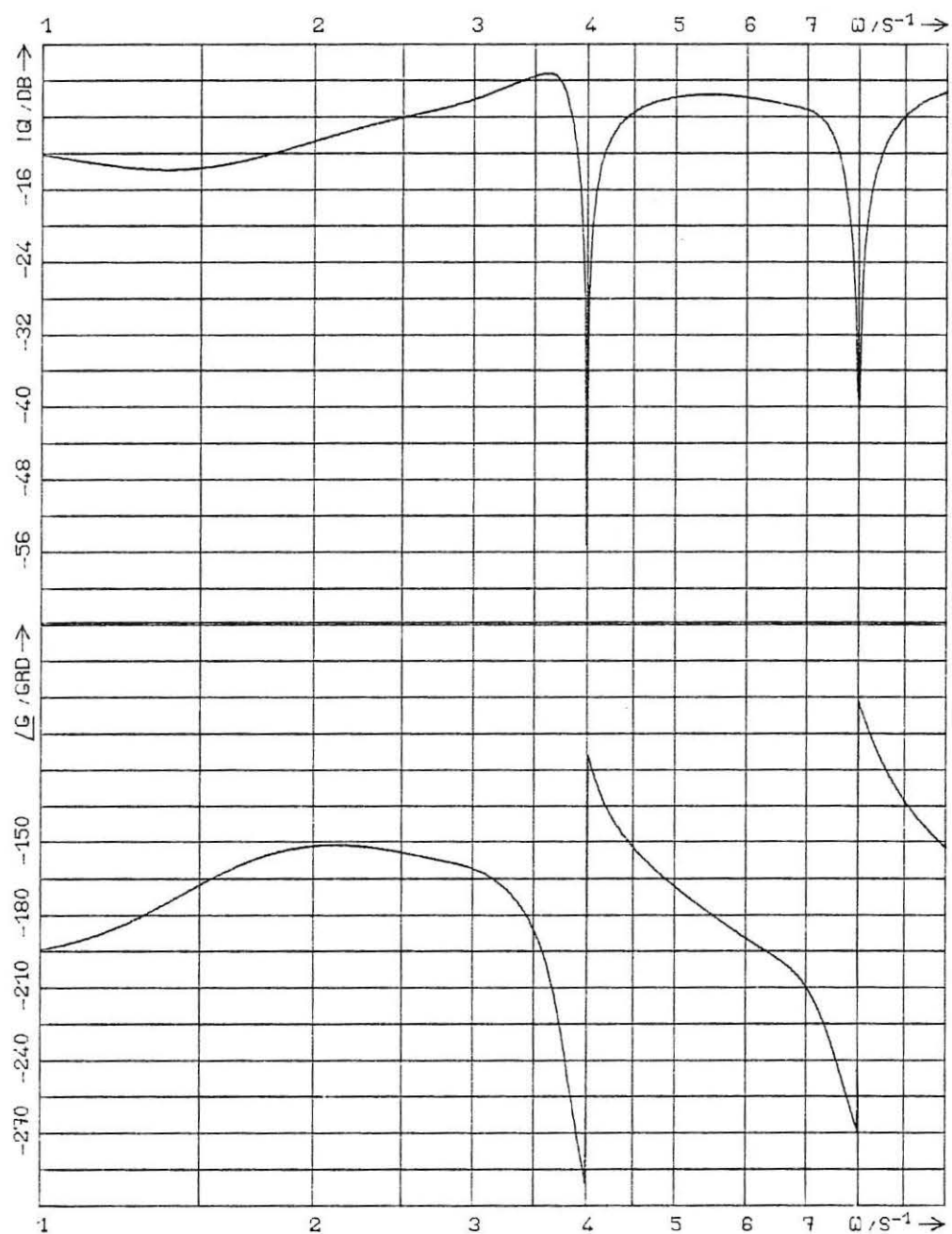


Bild 4.3.15: Zellenbeschleunigung \bar{z}''

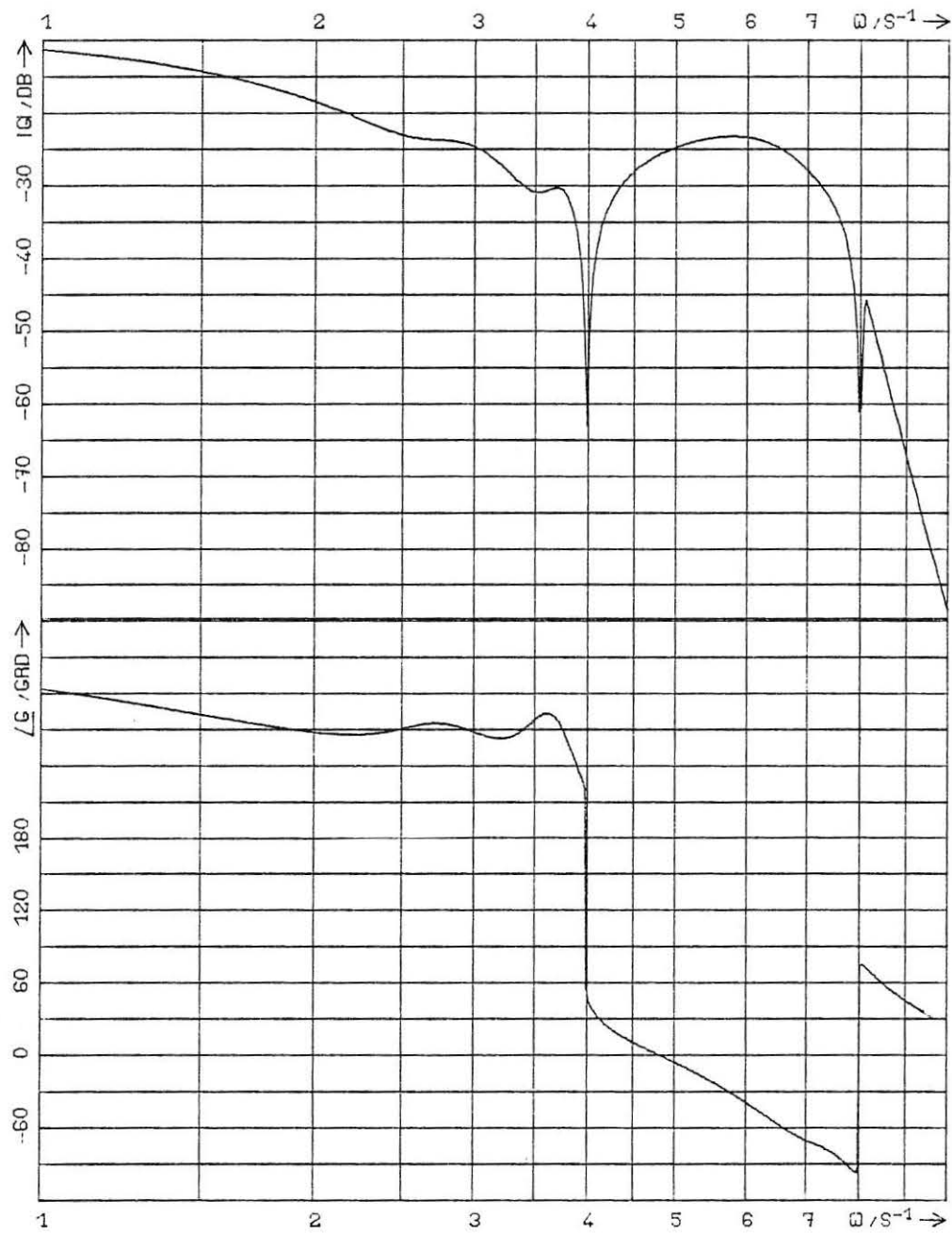
bei Rückführung von $\Delta \bar{x}$, $\Delta \bar{z}$, $\Delta \bar{\theta}$ und $\Delta \bar{p}_1$, $\Delta \bar{p}_2$, $\Delta \bar{p}_3$ (Aktuatorendruckdifferenzen)



STÖRFREQUENZGANG $F_1(I)/F_Z(R)$
EINGANG $F_Z(R)$ AUSGANG $F_1(I)$

Bild 4.3.16: Störfrequenzgang

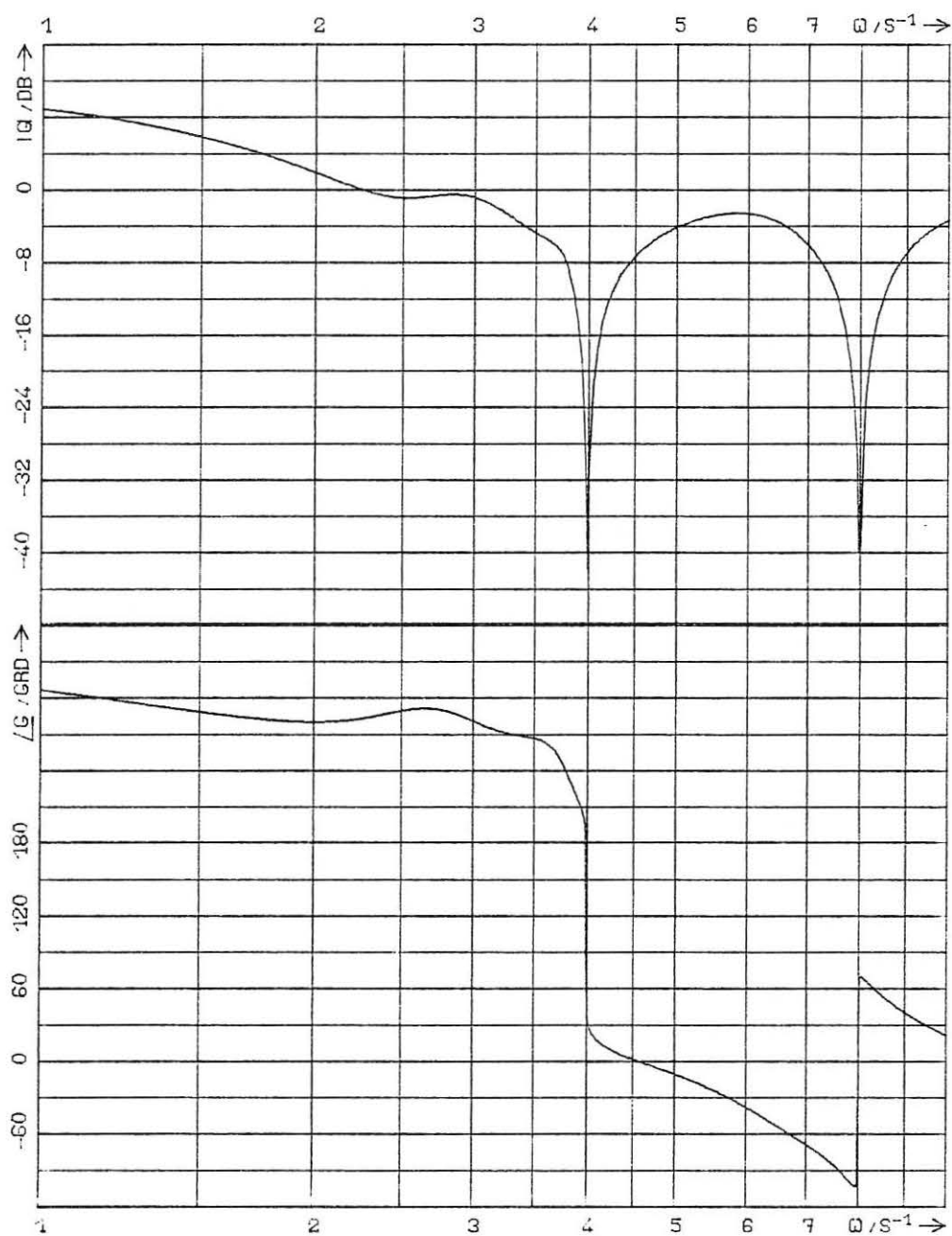
$$|\bar{F}_{s_{11}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_1}(j\omega)}{\bar{F}_{R_z}(j\omega)} \right|$$



STÖRFREQUENZGANG $F_1(I)/F_X(R)$
EINGANG $F_X(R)$ AUSGANG $F_1(I)$

Bild 4.3.17: Störfrequenzgang

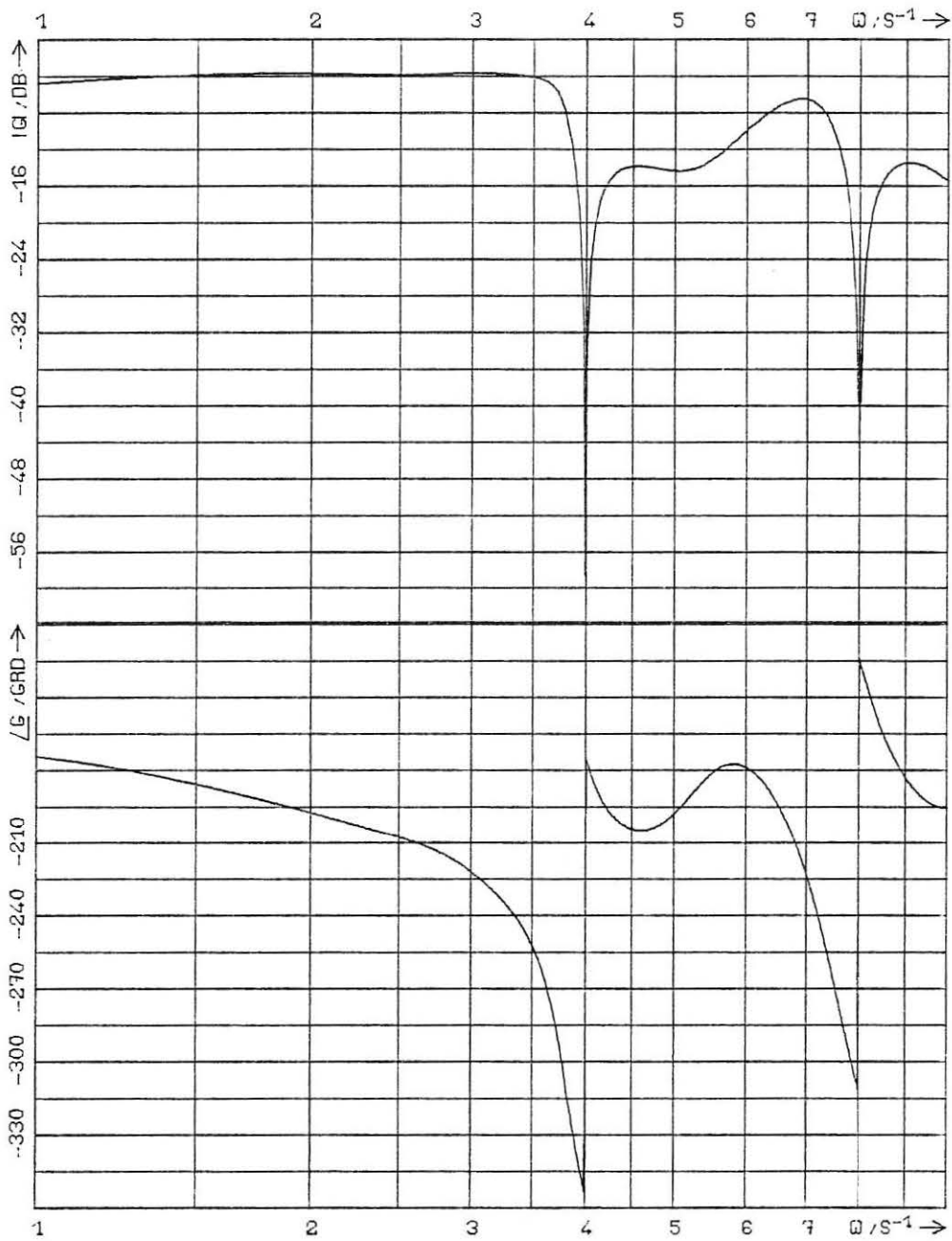
$$|\bar{F}_{s_{12}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_1}(j\omega)}{\bar{F}_{R_x}(j\omega)} \right|$$



STOERFREQUENZGANG $F_1(I)/MY(R)$
EINGANG $MY(R)$ AUSGANG $F_1(I)$

Bild 4.3.18: Störfrequenzgang

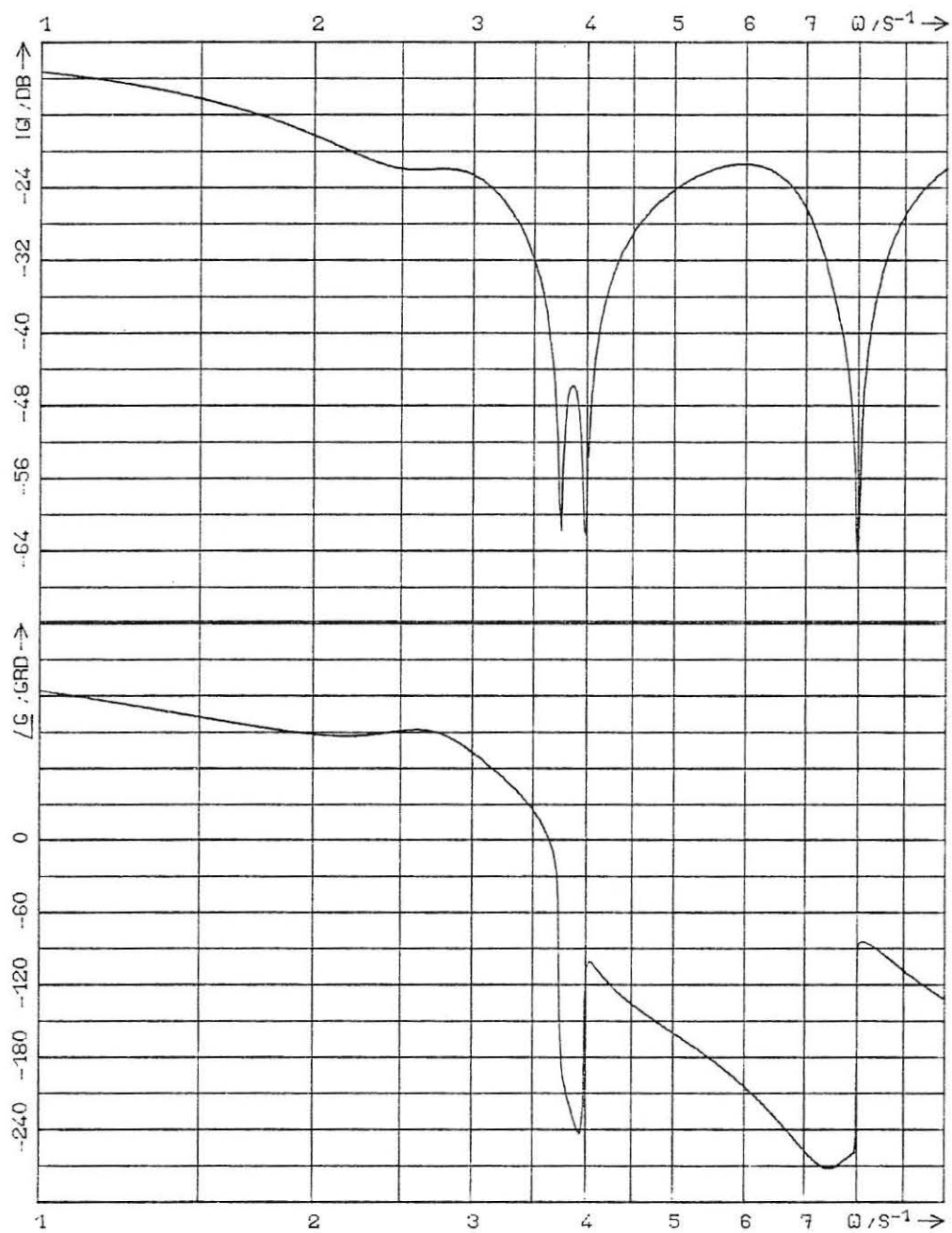
$$|\bar{F}_{s_{13}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_1}(j\omega)}{\bar{M}_{R_y}(j\omega)} \right|$$



STÖRFREQUENZGANG $F_2(I)/F_2(R)$
EINGANG $F_2(R)$ AUSGANG $F_2(I)$

Bild 4.3.19: Störfrequenzgang

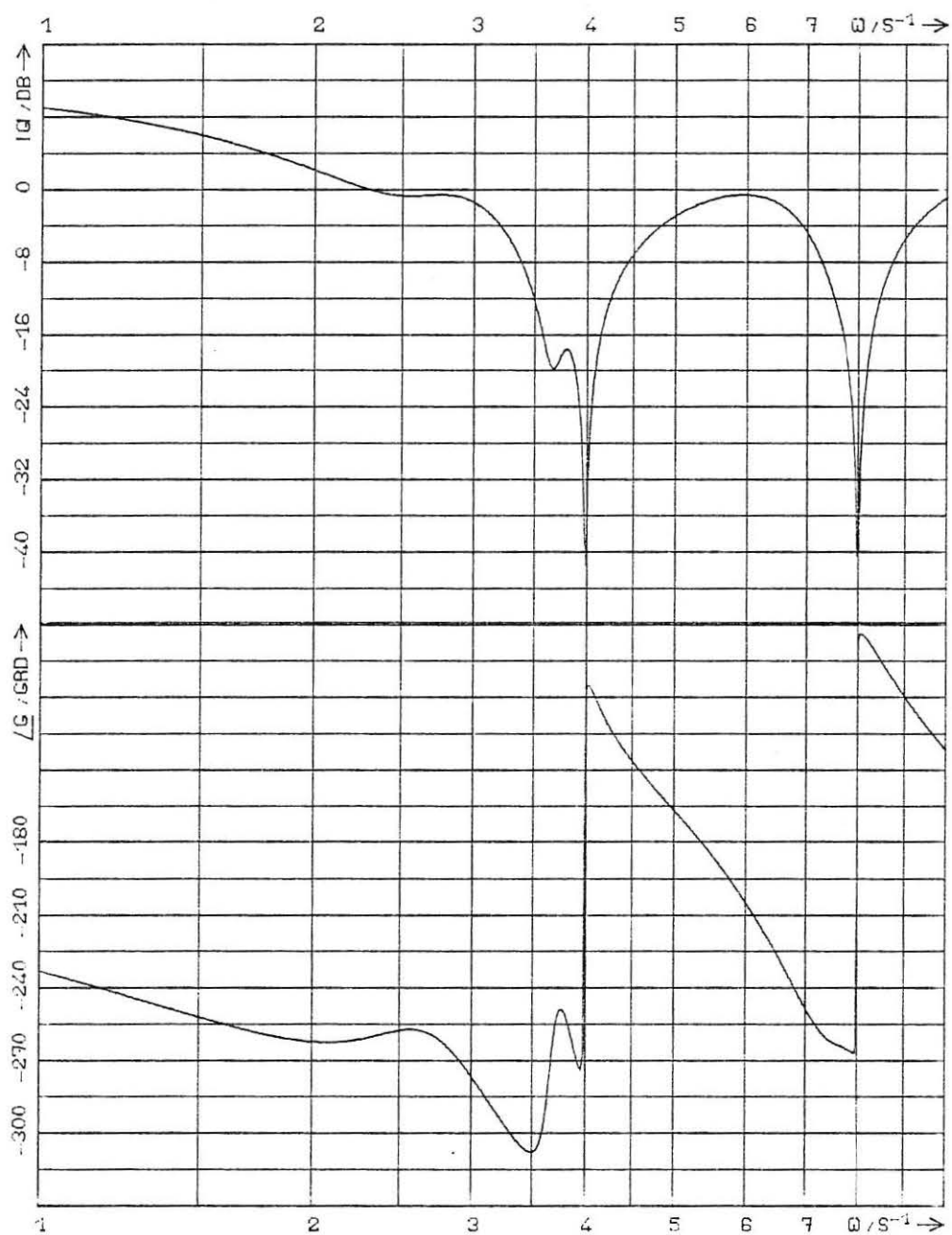
$$|\bar{F}_{s_{21}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_2}(j\omega)}{\bar{F}_{R_z}(j\omega)} \right|$$



STOERFREQUENZGANG $F_2(I)FX(R)$
EINGANG $FX(R)$ AUSGANG $F_2(I)$

Bild 4.3.20: Störfrequenzgang

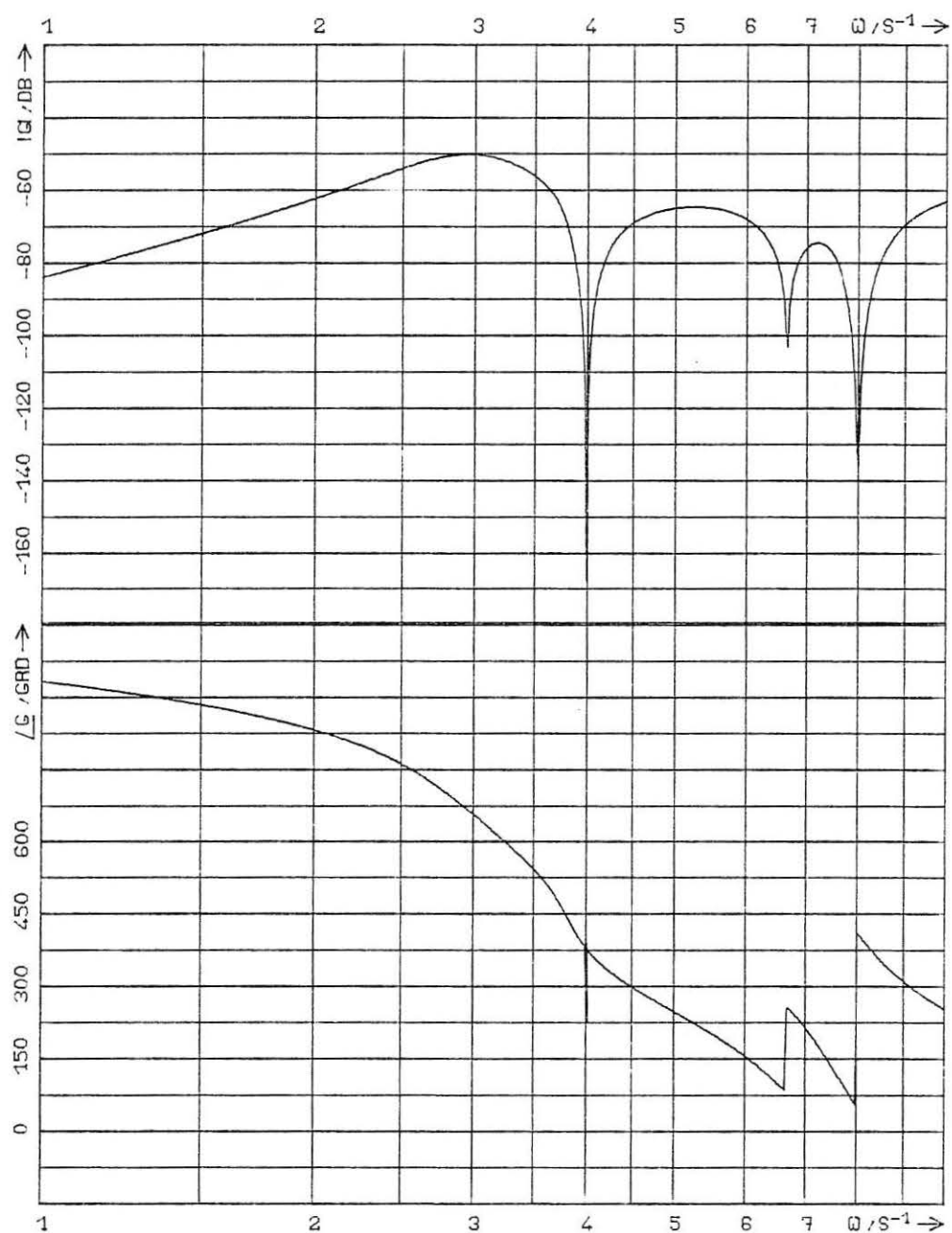
$$|\bar{F}_{s_{22}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_2}(j\omega)}{\bar{F}_{R_x}(j\omega)} \right|$$



STOERFREQUENZGANG $F_2(I)/MY(R)$
EINGANG $MY(R)$ AUSGANG $F_2(I)$

Bild 4.3.21: Störfrequenzgang

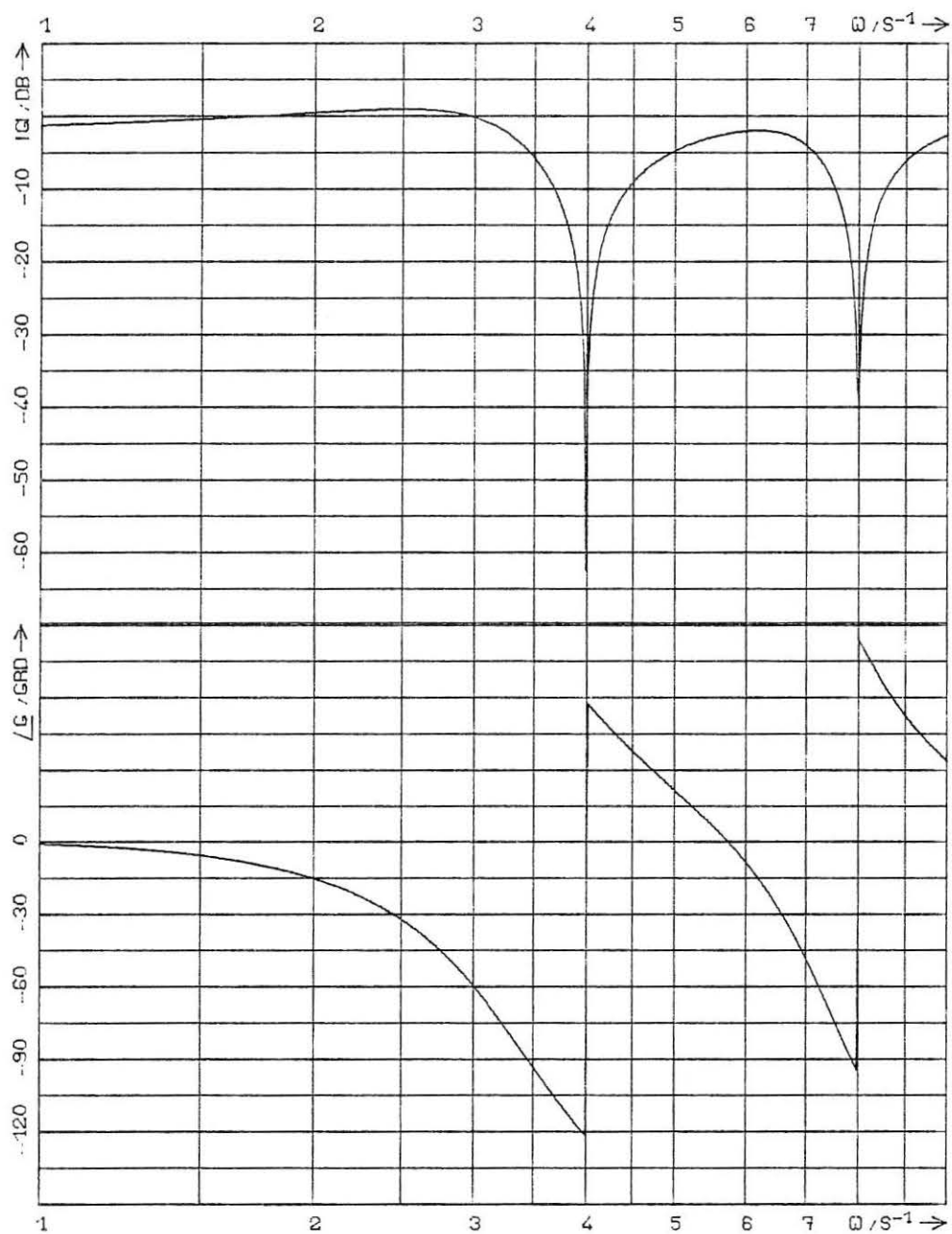
$$|\bar{F}_{s_{23}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_2}(j\omega)}{\bar{M}_{R_y}(j\omega)} \right|$$



STOERFREQUENZGANG $F_3(I)/F_2(R)$
EINGANG $F_2(R)$ AUSGANG $F_3(I)$

Bild 4.3.22: Störfrequenzgang

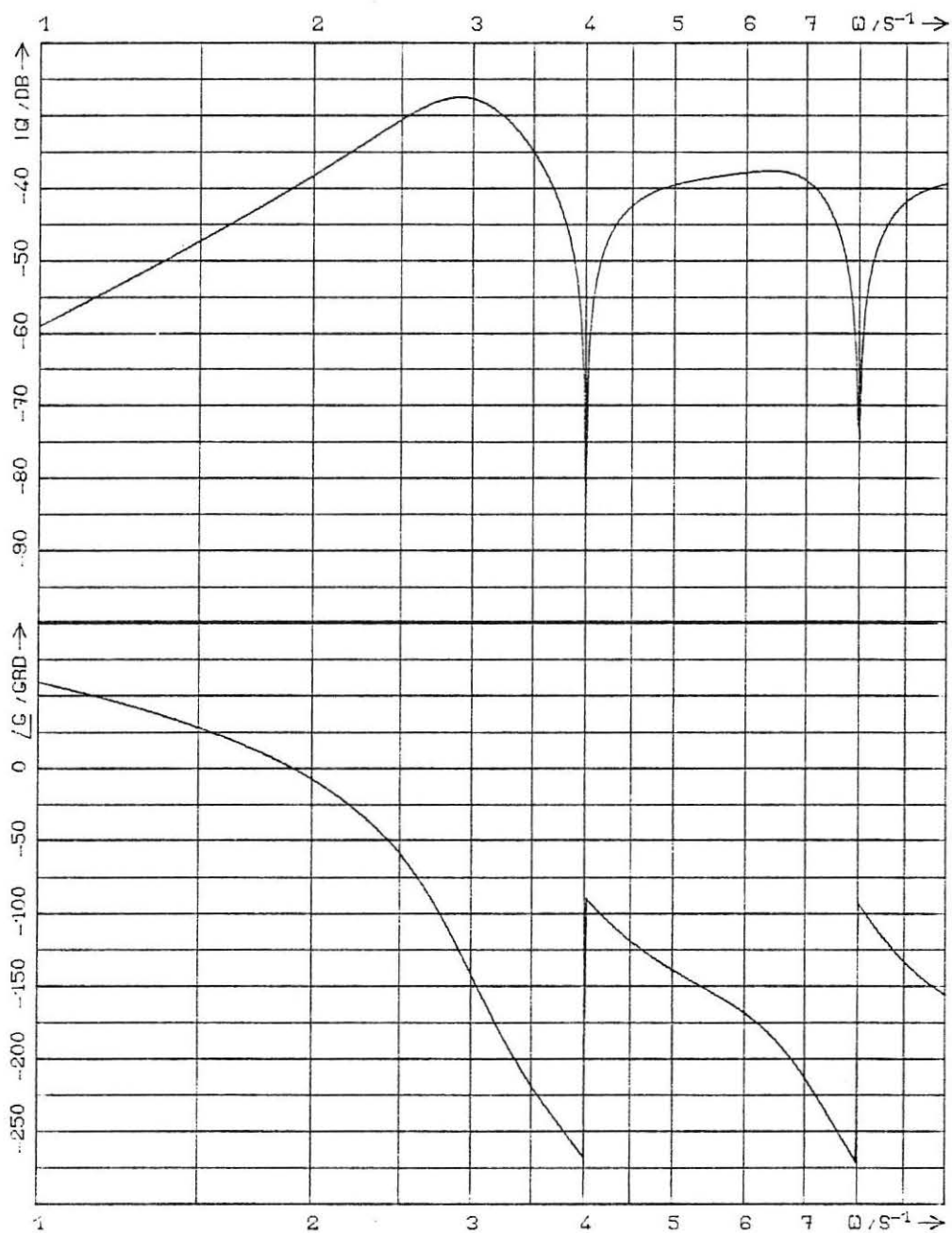
$$|\bar{F}_{s_{31}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_3}(j\omega)}{\bar{F}_{R_z}(j\omega)} \right|$$



STÖRFREQUENZGANG $F_3(I)/F_X(R)$
EINGANG $F_X(R)$ AUSGANG $F_3(I)$

Bild 4.3.23: Störfrequenzgang

$$|\bar{F}_{s_{32}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_3}(j\omega)}{\bar{F}_{R_x}(j\omega)} \right|$$



STÖRFREQUENZGANG $F_3(I)/M_Y(R)$
EINGANG $M_Y(R)$ AUSGANG $F_3(I)$

Bild 4.3.24: Störfrequenzgang

$$|\bar{F}_{s_{33}}(j\omega)| = \left| \frac{\bar{F}_{I_3}(j\omega)}{\bar{M}_{R_y}(j\omega)} \right|$$

4.4 Reglerentwurf nach Rechenmodell 3 (elastische Zellenmodellierung)

Die Gesamtdeformation des Hubschraubermodells (Einzelmassen-Balkenmodell) an der Stelle (x, θ) zur Zeit t erhält man durch Superposition der einzelnen Eigenschwingungsformen.

$$w(x, \theta, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, \theta) \cdot q_i(t)$$

Dabei ist q_i die Normalkoordinate der i^{ten} Eigenschwingungsform und $\phi_i(x, \theta)$ die normierte Eigenschwingungsform für den Eigenwert ω_{ni}^2 .

Die ermittelten Eigenschwingungsformen werden auf eine Amplitude an einer bestimmten Stelle des Balkenmodells "normiert", (hier an der Stelle der Endmasse).

Die ermittelten Eigenschwingungsformen (normal modes) bilden ein Orthogonalsystem.

Diese wichtige Eigenschaft bedingt eine mathematische Entkoppelung der Bewegungsbeschleunigungen des elastischen Hubschraubermodells bei Darstellung in Normalkoordinaten.

Um die Ordnung der Dynamik-Matrix des Systems mit Rang n zu erhalten, wurden bei der Regler-Auslenkung vier Frequenzen berücksichtigt.

$$f_1 = 7,1 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 27,8 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 76 \text{ Hz}$$

$$f_7 = 163,8 \text{ Hz}$$

Die dazugehörigen Modalmassen und Modalauslenkungen in der x -Achse bezogen auf 1m Modalauslenkung errechnen sich zu:

	Modalmasse kg m^2	Auslenkung am Ende
f_1	84,2	- . 3280
f_3	147,0	. 4640
f_5	510,0	- . 4603
f_7	152,3	. 0267

Die Aktuatorenbeschleunigungen \bar{z}_I'' und \bar{z}_{II}'' errechnen sich zu:

$$\Delta \bar{z}_I'' = \Delta \bar{z}_{Io}'' + \sum \bar{\phi}_k (1_{z_I}) \bar{q}_k'' \quad k = 1, 3, 5, 7$$

$$\Delta \bar{z}_{II}'' = \Delta \bar{z}_{IIo}'' + \sum \bar{\phi}_k (1_{z_{II}}) \bar{q}_k'' \quad k = 1, 3, 5, 7$$

Die Isolationskräfte wurden in folgende normierte Form gebracht:

$$\bar{F}_{I_1} = -\Delta \bar{p}_1 \cdot \bar{A}_1 + \bar{k}_1 [\Delta \bar{z}_I - 1_1 \Delta \theta] + \bar{d}_1 [\Delta \bar{z}_I' - 1_1 \Delta \theta']$$

$$\bar{F}_{I_2} = -\Delta \bar{p}_2 \cdot \bar{A}_2 + \bar{k}_2 [\Delta \bar{z}_{II} - 1_1 \Delta \theta] + \bar{d}_2 [\Delta \bar{z}_{II}' - 1_1 \Delta \theta']$$

$$\bar{F}_{I_3} = -\Delta \bar{p}_3 \cdot \bar{A}_3 + \bar{k}_3 \cdot \Delta \bar{x} + \bar{d}_3 \cdot \Delta \bar{x}'$$

Das geschlossene System hat die Form:

$$\underline{\dot{x}}' = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{\dot{1}} + \underline{B}_v \cdot \bar{F}_R \quad (\text{Erweiterung des Modells nach 2.1.1 auf Seite 85})$$

$$\underline{y} = \underline{C} \cdot \underline{x}$$

mit $\underline{x}^T = [\Delta \bar{z}, \Delta \bar{z}', \bar{q}_1, \bar{q}_1', \bar{q}_3, \bar{q}_3', \bar{q}_5, \bar{q}_5', \bar{q}_7, \bar{q}_7']$

$\Delta \bar{x}, \Delta \bar{x}', \Delta \bar{\theta}, \Delta \bar{\theta}', \bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3, \bar{\epsilon}_1', \bar{\epsilon}_2', \bar{\epsilon}_3',$

$\Delta \bar{p}_1, \Delta \bar{p}_2, \Delta \bar{p}_3, n_{o1}, n_{41}, n_{41}', n_{81}, n_{81}', n_{o2},$

$n_{42}, n_{42}', n_{82}, n_{82}', n_{o3}, n_{43}, n_{43}', n_{83}, n_{83}']$

(auf den nächsten Seiten sind die Matrizen \underline{A} , \underline{B} , \underline{B}_v numerisch zusammengestellt).

0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-5.88200E+01	-7.31000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.95380E+01	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	-2.94100E+01	-3.65500E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	-1.98000E+00	-2.45000E-01	-3.15450E+00	-1.01360E+00	-2.33600E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-5.45608E+02	-2.08621E+01	5.37527E+00	-3.39993E-02	1.88140E+01	-7.44089E+00	-2.36295E+03	5.40271E+02
-5.45608E+02	-2.08621E+01	-5.37527E+00	3.39993E-02	-1.88140E+01	7.44089E+00	5.40271E+02	-2.36295E+03
1.32392E-11	3.23633E-13	-2.56935E+02	-3.77553E+01	-4.48884E-01	-3.08628E-01	-1.24115E+00	1.24115E+00
0.00000E+00	-2.76200E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	3.31400E+00	4.19000E+02	0.00000E+00
0.00000E+00	-2.76200E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.31400E+00	0.00000E+00	4.19000E+02
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-2.76200E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-9.07500E-05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-7.30000E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-9.07500E-05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-7.30000E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	9.07500E-05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	7.30000E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	9.07500E-05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	7.30000E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

-2.01365E+01	1.89177E-04	-1.89177E-04	-3.02396E-01	-4.34632E-04	4.34632E-04	-1.77939E+00	-1.28452E-13
-1.86465E-01	-2.98932E-04	2.98932E-04	-7.38429E-03	-2.08077E-03	2.08077E-03	4.77330E-03	-3.54824E-15
-2.48903E+01	1.58441E-04	-1.58441E-04	-3.75750E-01	-1.06707E-03	1.06707E-03	-2.14732E+00	-1.65646E-13
3.59126E-01	-9.24515E-05	9.24515E-05	-2.50994E-04	-6.12722E-04	6.12722E-04	5.79308E-02	5.75597E-15
6.15275E-03	-5.21033E-03	5.21033E-03	1.00308E-04	-3.61017E-02	3.61017E-02	4.57182E-04	4.29933E-15
-7.26065E-02	-1.11876E-01	-1.78070E-01	-1.16373E-03	-2.70019E-01	-9.31792E-01	-5.60240E-03	2.17882E+00
1.01532E-02	4.84205E-02	-2.57136E-02	8.33962E-05	3.17952E-01	-1.81412E-01	1.59189E-03	1.73885E+00
3.66101E-04	-2.99605E-02	-3.38279E-01	-2.96483E-04	4.60613E-01	-1.92652E+00	3.24621E-03	8.97021E-01
7.31089E-03	1.80982E-02	-8.74977E-03	8.69830E-05	1.08386E-01	-2.00858E-02	8.45658E-04	5.52096E-01

0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.95380E+01	1.95380E+01	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.95380E+01	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-2.33600E+01	2.33600E+01	1.81000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-5.25537E+00	-6.42352E+01	8.41082E+00	-4.67897E-02	-1.00098E+02	4.78657E+01	-6.65140E-01	-9.59544E+01
5.25537E+00	8.41082E+00	-6.42352E+01	4.67897E-02	4.78657E+01	-1.00098E+02	6.65140E-01	-9.59544E+01
-2.45566E+03	-4.67897E-02	4.67897E-02	-6.61991E+01	-3.84555E-05	3.84555E-05	-1.01354E+02	-5.35897E-13
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.10300E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.10300E+01	0.00000E+00	0.00000E+00
4.19000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.10300E+01	0.00000E+00

0.00000E+00	0.00000E+00	-1.98000E+00	-2.45000E-01	-8.15450E+00	-1.01360E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00
-1.02426E+03	-1.91901E+03	-1.24069E+00	-1.66646E+01	2.19863E+02	2.45090E+02	-4.27891E+03	-8.89441E+01
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-2.33631E+04	-3.56422E+03	-3.34826E+00	1.17779E+01	-1.75424E+02	-1.92639E+02	-2.02256E+01	6.70886E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	-6.22900E+03	-3.51766E+03	-3.81870E+00	7.93088E-01	0.00000E+00	0.00000E+00
1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-9.07500E-05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-7.30000E-04	0.00000E+00	-1.61570E+00	0.00000E+00
3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-9.07500E-05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-7.30000E-04	0.00000E+00	-1.61570E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	9.07500E-05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	7.30000E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3.02300E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	9.07500E-05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2.43200E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	7.30000E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

[illegible]

MATRIX B

[illegible]

[illegible]

wird folgendes Einschwingungsverhalten des Systems erzielt:

siehe Bilder 4.4.1 bis 4.4.11

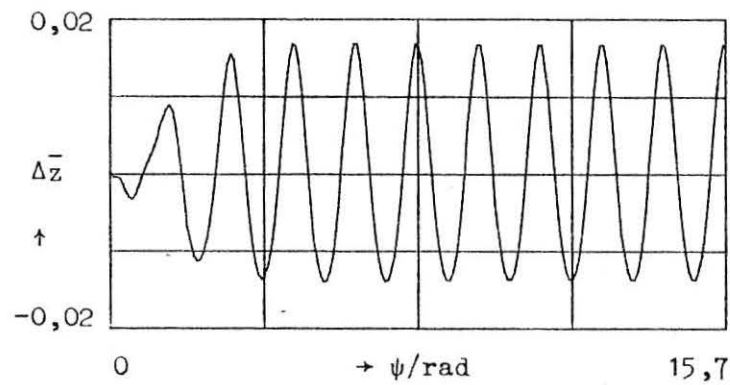


Bild 4.4.1: Relativauslenkung $\Delta \bar{z}$

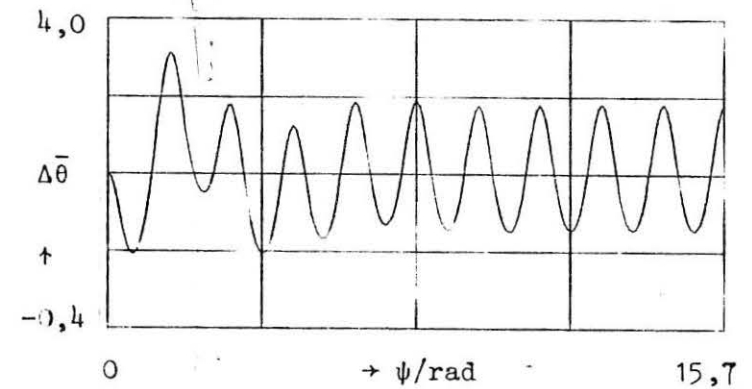


Bild 4.4.3: Relativdrehung $\Delta \bar{\theta}$

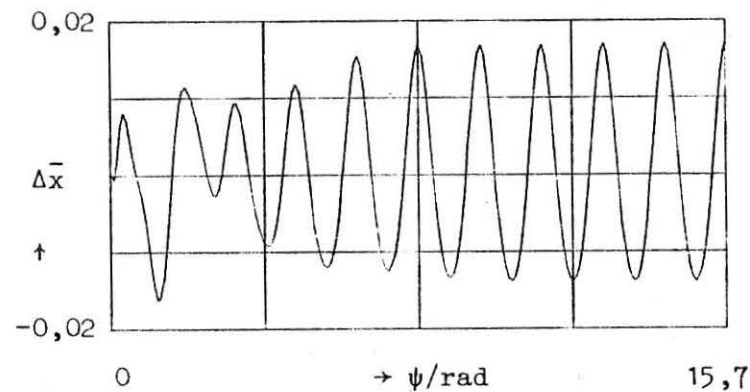


Bild 4.4.2: Relativauslenkung $\Delta \bar{x}$

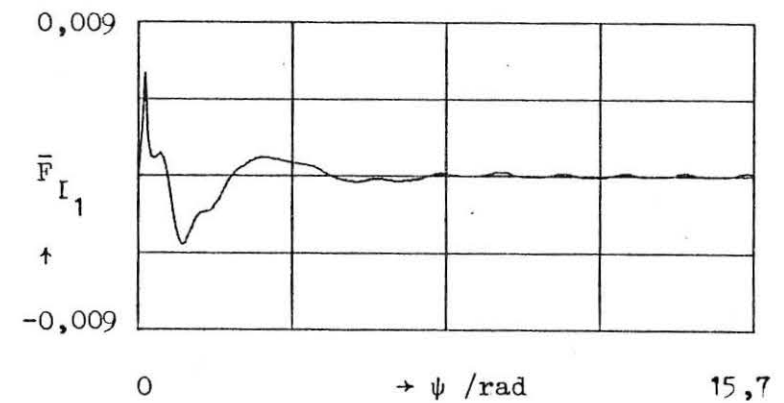


Bild 4.4.4: Isolatorkraft \bar{F}_{I_1}

Bei Rückführung von $\Delta \bar{x}$, $\Delta \bar{z}$, $\Delta \bar{\theta}$, \bar{q}_1 , \bar{q}_3 , \bar{q}_5 , \bar{q}_7 , $\Delta \bar{p}_1$, $\Delta \bar{p}_2$, $\Delta \bar{p}_3$ (Aktuatoren Druckdifferenz)

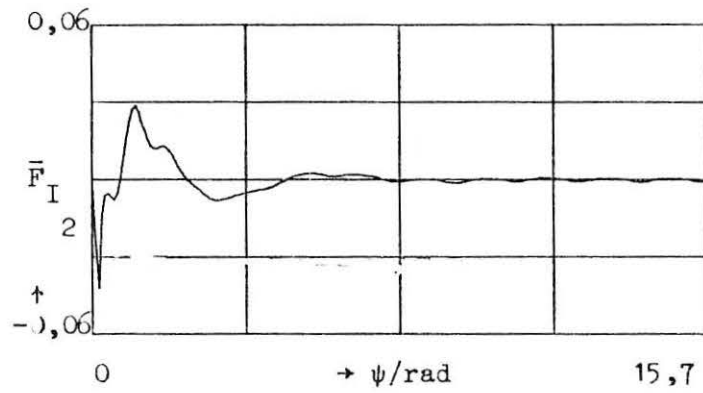


Bild 4.4.5: Isolatorkraft \bar{F}_{I_3}

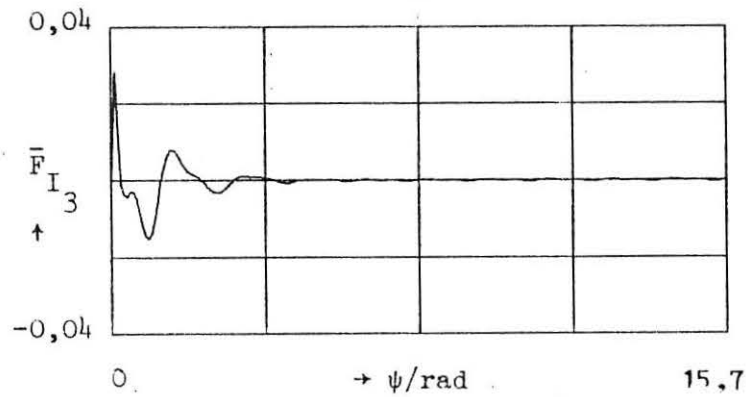


Bild 4.4.6: Isolatorkraft \bar{F}_{I_2}

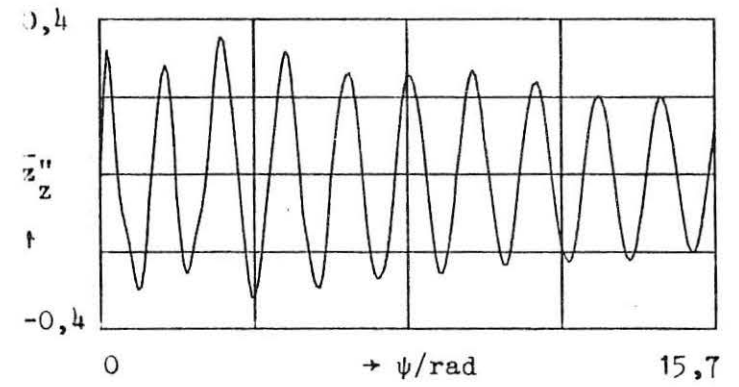


Bild 4.4.7: Zellenbeschleunigung \bar{z}_z''

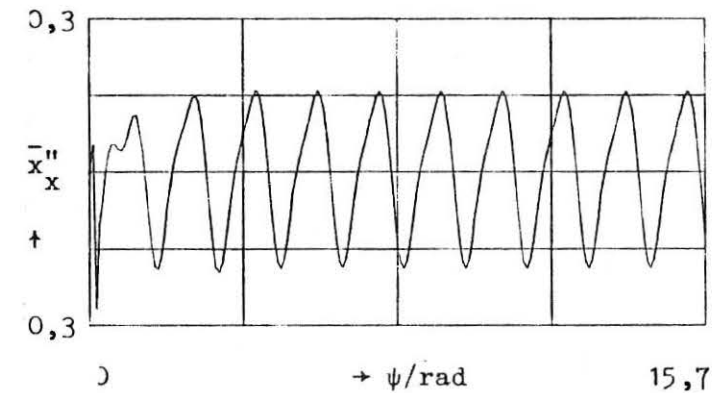


Bild 4.4.8: Zellenbeschleunigung \bar{x}_z''

Bei Rückführung von $\Delta \bar{x}$, $\Delta \bar{z}$, $\Delta \bar{\theta}$, \bar{q}_1 , \bar{q}_3 , \bar{q}_5 , \bar{q}_7 , $\Delta \bar{p}_1$, $\Delta \bar{p}_2$, $\Delta \bar{p}_3$ (Aktuatoren Druckdifferenz)

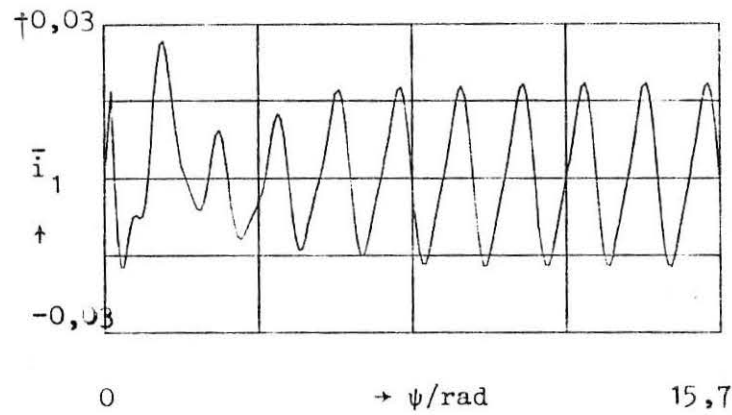


Bild 4.4.9: Ventilsteuerstrom \bar{i}_1

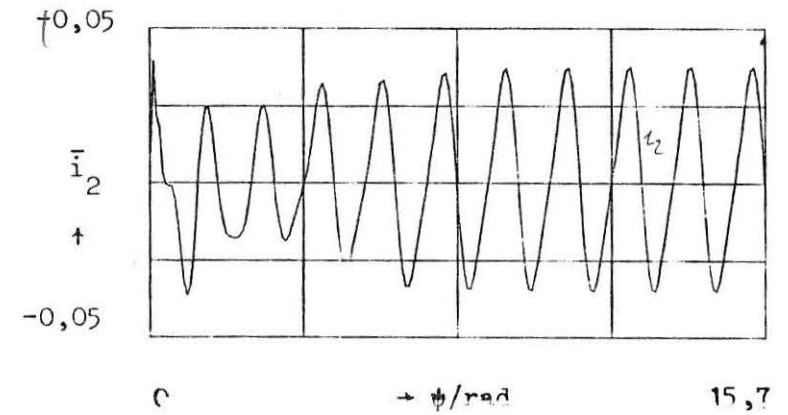


Bild 4.4.10: Ventilsteuerstrom \bar{i}_2

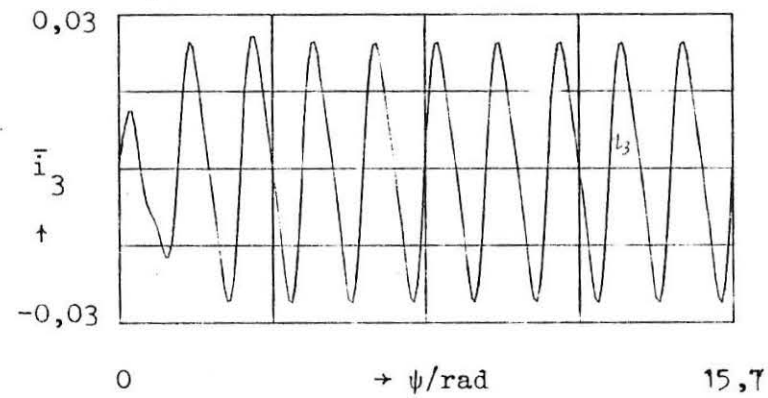


Bild 4.4.11: Ventilsteuerstrom \bar{i}_3

Bei Rückführung von $\Delta \bar{x}$, $\Delta \bar{z}$, $\Delta \bar{\theta}$, \bar{q}_1 , \bar{q}_3 , \bar{q}_5 , \bar{q}_7 , $\Delta \bar{p}_1$, $\Delta \bar{p}_2$, $\Delta \bar{p}_3$ (Aktuatoren Druckdifferenz)

5. Zusammenfassung

In diesem Bericht werden die Möglichkeiten der aktiven Schwingungsisolierung von Hubschraubern am Beispiel eines dreiachsigen Rechenmodells untersucht.

Die parametrische Untersuchung, anhand der starren und elastischen Zellenmodellierung zeigt, daß

- die Kompensation blattzahlharmonischer Rotorerregungen und
- die Begrenzung der statischen Relativbewegungen der Rotor-Getriebe-Einheit

theoretisch für jeden Hubschrauber möglich ist.

Geregelt wurde für die entworfenen Regler durch Rückführung derjenigen Größen, die von äußeren Störeinflüssen befreit werden sollen.

In die jeweilige Rückführung wurde das Modell, desjenigen Systems welches die äußeren Störungen erzeugt mathematisch nachgebildet.

Dabei werden in der Rückführung die Isolatorenkräfte (Ursache) und nicht die Isolatorenananschlußbeschleunigung (Wirkung) benutzt.

Dabei wurde eine aktive Unterdrückung der Zellen-Erregung durch Kompensation der Rotorstörerregung erzielt.

Die Berechnung der Rückführkoeffizienten erfolgte mit (modifizierten) Riccati-Entwürfen, wobei im Gütekriterium vereinfachte Gewichtsmatrizen verwendet wurden.

6. Literatur

- [1] CCG-Lehrgang, Dynamik von Mehrkörper-Fahrzeugen
vom 2.5.-6.5.1977 und 9.5.-13.5.1977
in Oberpfaffenhofen
- [2] Likins, P.W., Dynamics and Control of Flexible
Space Vehicles
Technical Report 32-1329
California Institut of Technology
Pasadena (1970)
- [3] CCG-Lehrgang Einführung in die Technik des Hub-
schraubers
vom 19.9. - 23.9.1977 in Ober-
pfaffenhofen
- [4] Uhrig, P., Elastostatik und Elastokinetik
in Matrizenschreibweise
Springer-Verlag (1973)
- [5] Müller, P., Stabilität und Matrizen
Matrizenverfahren in der Stabilitäts-
theorie linearer dynamischer Systeme
Springer-Verlag (1977)
- [6] Obermayer, M., Aufstellen der Systemgleichungen,
für das ASIS-Funktionsmodell in
Verbindung mit regelungstechnischen
Untersuchungen
Technischer Bericht der Firma MBB,
TN-DE 122-5/77, (26.7.1977)
- [7] Skudridakis, J., Untersuchungen zu einem aktiven
Schwingungsisolationssystem für
Hubschrauber bei starrer und
elastischer Zellenmodellierung
DFVLR-IB 552/78-6